

Baccalauréat ES Asie juin 1998

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction de la variable réelle x , définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x(e^x + a) + b$$

où a et b sont deux constantes réelles. Les renseignements connus sur f sont donnés dans le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0		
$f(x)$	-3	\nearrow	

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a (f' désigne la fonction dérivée de f .)
2.
 - a. Déterminer a et b en vous aidant des informations contenues dans le tableau ci-dessus.
 - b. Calculer $f(0)$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
 - c. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de variation de f .
3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$e^x(e^x - 2) - 3 = 0$$

(on pourra poser $X = e^x$).

4. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations

$$e^x(e^x - 2) - 3 \geq -4$$

$$e^x(e^x - 2) - 3 \leq 0$$

(On utilisera le tableau de variation donné ci-dessus et en particulier les informations obtenues en 2 b)

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Un magasin de grande surface procède à des opérations de solde sur tous les disques (CD) de son rayon musique :

- 20 % de ces disques sont des CD « classiques ». 80 % d'entre eux sont vendus à moitié prix, les autres sont vendus avec une remise de 40 % sur le prix initial.
- 30 % de ces disques sont des CD « Jazz ». 70 % d'entre eux sont vendus à moitié prix, les autres sont vendus avec une remise de 20 % sur le prix initial.
- 50 % de ces disques sont des CD « Pop-Rock ». 60 % d'entre eux sont vendus à moitié prix, les autres sont vendus avec une remise de 30 % sur le prix initial.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Un client a payé 42 F un disque.
Quels étaient les différents prix possibles de cet article avant les opérations de solde?
2. Un client choisit un disque au hasard.

- a. Sachant que c'est un CD « Jazz », quelle est la probabilité qu'il le paie à moitié prix?
- b. Son prix marqué avant les opérations de solde est de 90 F; quelle est la probabilité que ce soit un CD « Pop-Rock » vendu à 45 F?
- c. Quelle est la probabilité que ce disque choisi soit vendu à moitié prix?

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Un dé non truqué comporte six faces ainsi marquées :

1 1 1 2 2 4

1. On lance ce dé une fois.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir une face marquée 2?
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face marquée 1 ou 2?
(les résultats numériques seront donnés sous forme d'une fraction irréductible).
2. On lance ce dé trois fois de suite.
Les différents jets de ce dé sont supposés indépendants.
On note de gauche à droite, chaque fois, le chiffre obtenu.
Un nombre de trois chiffres est ainsi créé.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421?
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre formé exactement d'un 1, d'un 2, d'un 4?
 - c. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre contenant au moins une fois le chiffre 2?
(les résultats numériques seront donnés sous forme d'une fraction irréductible).
3. On jette cinq fois de suite ce dé (les jets sont indépendants).
Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois exactement le chiffre 1?
On pourra utiliser un schéma de Bernoulli.
(Le résultat numérique est donné sous forme approchée à 10^{-2} près par défaut.)

PROBLÈME**10 points**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - e \cdot \ln(x)$$

dans laquelle $e \cdot \ln(x)$ est le produit du nombre e par le logarithme népérien de x .

1. Question préliminaire
Tracer dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm
 - la courbe (E) d'équation $x \in [0; +\infty[$, $y = e^x$
 - la courbe (H) d'équation $x \in [0; +\infty[$, $y = \frac{e}{x}$.
 Au moyen d'une lecture graphique, déterminer le signe de $e^x - \frac{e}{x}$ suivant les valeurs de x dans $]0; +\infty[$.
2. Étude de la fonction f
 - a. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
 - b. En utilisant l'écriture suivante de $f(x)$: $f(x) = e^x \left(1 - e \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{e^x} \right)$ calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

- c. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$.
Dédire des résultats de la question 1 l'étude des variations de la fonction f .
3. Tracer la courbe (\mathcal{C}) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unités graphiques 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.
Préciser la droite asymptote à (\mathcal{C}) et la tangente à (\mathcal{C}) parallèle à l'axe des abscisses.
4. Calcul d'une aire
- a. Vérifier que la fonction s définie sur $]0; +\infty[$ par

$$s(x) = x \cdot \ln(x) - x$$

est une primitive de la fonction \ln .

- b. Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.