Baccalauréat ES Asie juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Le tableau suivant recense par clinique le nombre de postes du personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
Nombre de lits x_i	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes y_i	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques : 1 cm pour 20 lits en abscisse et 1 cm pour 50 postes en ordonnée.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (les détails des calculs ne sont pas demandés).
   Pour les coefficients, on prendra les valeurs décimales arrondies à 10^{-1} près.
   Tracer cette droite dans le repère précédent.
4. Une clinique possède 35 lits.
   a. En utilisant les résultats obtenus en 3, combien devrait-elle embaucher de personnel occupant un poste non médical à temps plein ?
   b. En réalité, cette clinique dispose de 60 postes.
   Calculer la différence entre le nombre de postes réels et le nombre de postes théoriques obtenu précédemment.
   Quel pourcentage cette différence représente-t-elle par rapport à la situation théorique ?

EXERCICE 2 **6 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Énoncé

Un grand club de ski français propose à la vente :

- des licences ;
- des cartes neige à prix normal ;
- des cartes neige à prix réduit pour les habitants de la commune.

Pour chacun de ces titres vendus, il faut distinguer deux catégories : la catégorie jeunes et la catégorie adultes.
Le nombre de titres vendus pour la saison 98 se répartit de la manière suivante :

- 8,5 % de licences ;
- 77,5 % de cartes neige à prix réduit ;
- 1,5 % de licences catégorie jeunes ;
- 2,5 % de cartes neige à prix normal catégorie jeunes.

De plus, parmi les personnes ayant acheté une carte neige à prix réduit, 86,5 % sont des adultes.
On note :
L : l'évènement « La personne a acheté une licence » ;
CN : l'évènement « La personne a acheté une carte neige à prix normal » ;
CR : l'évènement « La personne a acheté une carte neige à prix réduit » ;
J : l'évènement « La personne est dans la catégorie jeunes » ;
A : l'évènement « La personne est dans la catégorie adultes ».
Questions
On choisit au hasard un client de la saison 98.

1. Déterminer la probabilité pour que :
   - **a.** cette personne ait acheté une carte neige à prix normal ;
   - **b.** cette personne ait acheté une carte neige à prix réduit catégorie adultes.
2. Montrer que la probabilité pour que la personne ait acheté une carte neige à prix réduit catégorie jeunes est égale à $0,105$.
3. Sachant que la personne a acheté une licence, quelle est la probabilité pour qu'elle appartienne à la catégorie adultes ?
4. Quelle est la probabilité pour que cette personne appartienne à la catégorie jeunes ?
5. Sachant que la personne est jeune, quelle est la probabilité pour qu'elle ait acheté une licence ?

   Pour répondre aux questions, on peut utiliser la méthode des arbres. Tous les résultats sont donnés avec un arrondi à 10^{-3} près (ex : 0,105 ou $10,5\,\%$.)

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Énoncé

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on a placé les points :

A(0 ; 0 ; 18)	B(0 ; 15 ; 0)	
C(22,5 ; 0 ; 0)	D(0 ; 0 ; 12,5)	(voir Annexes 1 et 2)
E(0 ; 25 ; 0)	F(12,5 ; 0 ; 0).	

Le plan (ABC) a pour équation : $4x+6y+5z=90$.
Le plan (DFE) a pour équation : $2x+y+2z=25$.
La droite (GI) est l'intersection des plans (ABC) et (DFE).
On admet que tout point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartenant au polyèdre ODGBIF a des coordonnées qui satisfont aux conditions :

- $x>0$
- $y\geqslant 0$
- $z>0$
- $4x+6y+5z\leqslant 90$
- $2x+y+2z\leqslant 25$

Une usine fabrique 3 types de vannes pour l'industrie pétrolière.
Pour fabriquer le modèle V1, il faut 20 heures d'usinage et 20 heures de montage.
Pour fabriquer le modèle V2, il faut 30 heures d'usinage et 10 heures de montage.
Pour fabriquer le modèle V3, il faut 25 heures d'usinage et 20 heures de montage.
Le nombre d'ouvriers spécialisés permet de disposer de 450 heures d'usinage par semaine.
Le nombre d'ouvriers monteurs permet de disposer de 250 heures de montage par semaine.
On désigne par x le nombre de vannes de type V1 fabriquées dans une semaine, y le nombre de vannes de type V2 et z le nombre de vannes de type V3.
Les points de coordonnées $(X\,;\,Y\,;\,Z)$ qui satisfont aux contraintes précédentes sont situés à l'intérieur du polyèdre ODGBIE.
Le bénéfice réalisé sur une vanne de type V1 est de 2 000 F, sur une vanne de type V2, il est de 3 000 F et enfin sur une vanne de type V3, il est de 5 000 F.
Un point de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ représente une production.

Questions

- **a.** Montrez que les points représentant une production pour laquelle le bénéfice total est de 30 000 F sont situés sur le plan (P) d'équation cartésienne : $2x+3y+5z=30$.

  Le plan (P) est tracé sur la figure de l'annexe 2.
- **b.** Montrez qu'une production de 5 vannes de type V1, de 5 vannes de type V2 et d'une vanne de type V3 est réalisable par cette usine en une semaine et que le bénéfice alors réalisé est de 30 000 F.

  Quelle conclusion en tirez-vous sur la position du point K de coordonnées $(5\,;\ 5\,;\,1)$?

c. Montrez que les points représentant une production pour laquelle le bénéfice total est de 60 000 F sont situés sur le plan (Q) d'équation cartésienne : $2x+3y+5z=60$.

d. Quelle remarque pouvez-vous faire sur les plans (P) et (Q) ?

e. On admet que le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximal lorsque le plan (R) d'équation $2x+3y+5z=b$ passe par le point G dont les coordonnées sont $\left(0\,;\,\frac{55}{7}\,;\,\frac{60}{7}\right)$.

Calculer ce bénéfice maximal.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,50]$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{50x}{x+1}-50\ln(x+1)-50.$$

La dérivée $f'(x)$ est égale à : $\dfrac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}$.

La courbe $(\mathscr{C})$ de f est donnée en annexe.

1. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,50]$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,50]$. On admet que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur αet de l'intervalle $]0\,;\,50[$; en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,50]$.
3. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

   Pour la suite du problème, on prendra pour α la plus petite de ces deux valeurs.

Partie B

Une entreprise fabrique une quantité x, exprimée en kilogrammes, d'un certain produit.

Le coût marginal C, exprimé en euros, est défini sur $[0\,;\,50]$ par

$$C(x)=2x+\frac{50}{x+1}$$

1. La fonction coût total, notée C_{T} est la primitive de la fonction C sur $[0\ ;\ 50]$ qui prend la valeur 50 pour $x=0$.

   Vérifier que $C_{\text{T}}(x)=x^2+50\ln(x+1)+50$.
2. Le coût moyen est la fonction C_m, définie par :

$$C_m(x)=\frac{C_{\text{T}}(x)}{x}\text{sur}]0\ ;\ 50].$$

   a. Donner une expression de $C_m(x)$ en fonction de x.

   b. Vérifier que la dérivée de C_m peut se mettre sous la forme

$$C'_m(x)=\frac{f(x)}{x^2}.$$

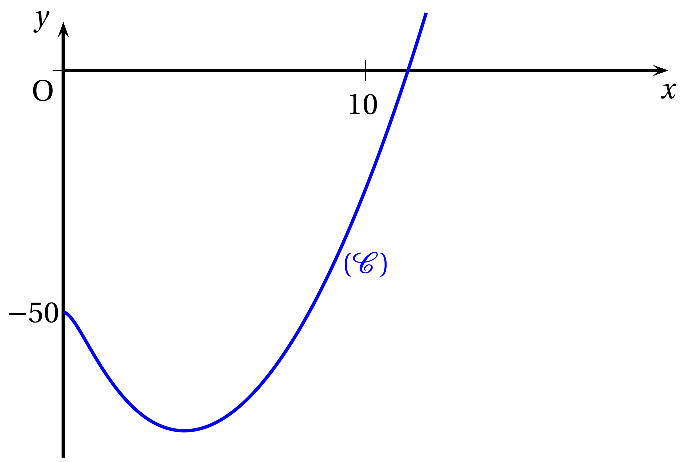
Partie C

1. Déduire des résultats précédents le tableau de variation de la fonction C_m sur $]0\,;\,50]$.
2. Tracer dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative de C_m sur $[1\,;\,50]$.

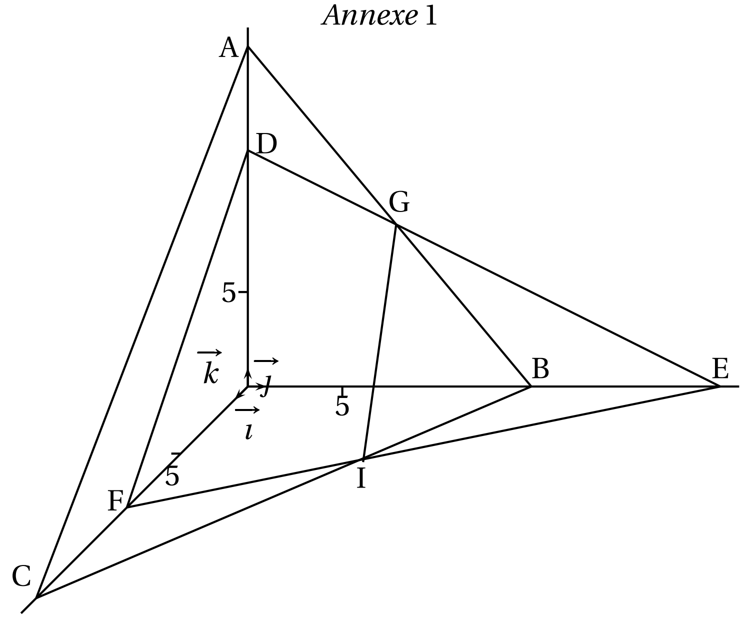
3. Quelle est la production donnant le coût moyen minimal ?
Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

Annexe 3

Courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction f.



Annexe 1



Annexe 2