Baccalauréat ES Asie juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une statistique publiée en l'an 1998 donne le nombre d'abonnés à internet dans le monde, à la fin de l'année indiquée :

Année	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
(Prévoir sur l'axe des y des graduations jusqu'à 500).
2. Des prévisions ont été réalisées pour les années 1999, 2000 et 2001 à l'aide d'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
   a. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, les coefficients étant arrondis au dixième. Tracer cette droite sur le graphique.
   b. Calculer avec cet ajustement les prévisions p, q et r du nombre d'abonnés à internet pour les années 1999, 2000 et 2001.
3. Le nombre d'abonnés à internet pour les années 1999 et 2000 est maintenant connu, on obtient le nouveau tableau :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150	248	407

   a. Placer les nouveaux points sur le graphique. L'ajustement choisi à la question **2** ne paraît plus pertinent ; on essaie donc un autre ajustement.
   b. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$.
   Calculer, arrondies au centième, les valeurs $z_i = \ln\left(y_i\right)$ pour i entier variant de 0 à 5, et les présenter dans un tableau. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x, les coefficients étant arrondis au centième.
   c. En déduire l'ajustement : $y = 30\mathrm{e}^{0,53x}$.
   d. Calculer avec cet ajustement la nouvelle prévision r' pour l'année 2001.
   Quelle serait, avec ce deuxième ajustement, la prévision pour 2002 en millions d'abonnés ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :
La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à $0,04$.
En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de $0,03$.
Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de $0,94$.
On note C l'évènement : « la calculatrice présente un défaut de clavier », A l'évènement « la calculatrice présente un défaut d'affichage ».

On notera $p(E)$ la probabilité de l'évènement E. L'évènement contraire de E sera noté $\overline{E}$.
$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.
Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. **a.** Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$$p_{\overline{C}}(A),\quad p_C(A)\quad \text{et}\quad p(C).$$

   b. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.
   a. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
   b. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
   c. En déduire $p(\text{A})$.
   d. Montrer que la probabilité de l'évènement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.
3. Un client choisit au hasard trois calculatrices de cette marque.
   a. Calculer la probabilité pour que les trois calculatrices ne présentent aucun défaut.
   b. Calculer la probabilité pour qu'au moins une calculatrice ait un défaut.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On rappelle que l'euro, est la nouvelle monnaie en usage en France.
Les résultats numériques seront donnés arrondis à l'unité.
En janvier 2002, un artisan a réalisé une recette de 2 300 euros alors que ses coûts se sont élevés à 800 euros. Son bénéfice est donc de 1 500 euros. Grâce à une clientèle en augmentation, la recette, c'est-à-dire le chiffre d'affaires de cet artisan, augmente de 1 % tous les mois.
Cependant les coûts, c'est-à-dire les frais, augmentent pendant le même temps de 2,5 %.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	janvier 2002	février 2002	mars 2002
Rang du mois	0	1	2
Recette	2 300		
Coûts	800		
Bénéfice	1 500		

2. Pour le mois de rang n, avec n entier naturel, on note R_n le montant de la recette, C_n le montant des coûts et B_n le montant du bénéfice.
   a. Exprimer R_n et C_n en fonction de n ; justifier votre réponse.
   b. Montrer que $B_n = 2300 \times (1,01)^n - 800 \times (1,025)^n$.
3. Pour étudier le sens de variations de la suite (B_n), on étudie le signe de $B_{n+1} - B_n$.
   a. Établir que, pour tout entier positif n,

$$B_{n+1} - B_n = 23 \times (1,01)^n - 20 \times (1,025)^n.$$

b. Établir que :

$$23 \times (1,01)^n - 20 \times (1,025)^n > 0 \quad \text{équivaut à} \quad \left(\frac{1,025}{1,01}\right)^n < \frac{23}{20}.$$

En déduire les valeurs de n telles que l'inégalité $B_{n+1} - B_n > 0$ soit vérifiée.

Que peut-on dire de la suite (B_n) dans ce cas ?

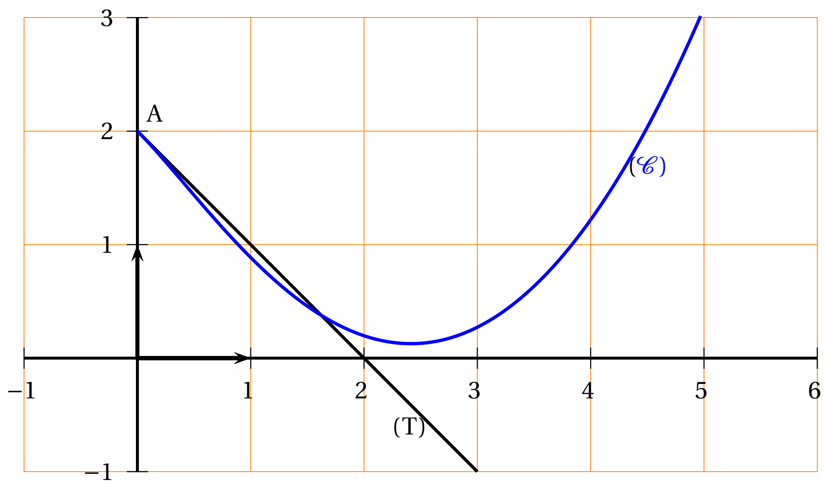
4. Le bénéfice de cet artisan peut-il diminuer ? Si oui, à partir de quel mois obtiendra-t-il une baisse par rapport au mois précédent ?

PROBLÈME **10 points**

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.
Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.
L'objet de la **partie A** est de déterminer une fonction h satisfaisant à des conditions données.
L'objet de la **partie B** est l'étude de propriétés d'une fonction f.
L'objet de la partie **C** est d'utiliser certains résultats de la **partie A** pour répondre à des questions d'ordre économique.

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$.
Le point A a pour coordonnées $(0; 2)$. La droite (T) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.



1. Préciser $h(0)$.
Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).

2. La fonction h, définie sur $[0 ; +\infty[$ est de la forme :

$$h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1) \quad \text{où} \quad a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note h' la dérivée de la fonction h. Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.

3. On donne $h'(3) = \dfrac{1}{2}$.
En utilisant ce résultat et les résultats de la question **1** déterminer chacune des valeurs a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur I = [0 ; 5] par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1).$$

1. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Montrer que pour tout x de l'intervalle I :

   $$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}.$$

   c. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I.

   d. En déduire les variations de f sur $[0;5]$.

2. Soit g la fonction définie sur I par :

   $$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

   a. Calculer la dérivée de la fonction g.

   b. En déduire une primitive de la fonction f sur I.

   c. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

Sur l'intervalle $[0;5]$, la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.
On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.
x représente le volume en milliers de litres, x variant sur l'intervalle $[0;5]$;
$f(x)$ représente le coût marginal en milliers d'euros.

1. Quel est le coût marginal en euros, du 3 000$^{\text{e}}$ litre produit ?
2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (donner la valeur au litre près).
3. Les coûts fixes sont de 1 000 euros.

   a. Montrer, en utilisant le résultat de la **partie B**, question **2. b**, que le coût total est donné par l'expression définie sur $[0;5]$ par :

   $$C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1.$$

   b. Calculer $C(5) - C(0)$ à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence.
   Comparer ce résultat à celui à la **partie B** question **2. c** et expliquer cette réponse.