

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Asie juin 1995 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan orienté, on considère deux droites orthogonales  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  et quatre points distincts A, B, C et D tels que :

- A et C sont sur  $(\mathcal{D})$ , B et D sont sur  $(\mathcal{D}')$ ,
- $AC = BD$  et  $(\vec{AC}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$
- $[AC]$  et  $[BD]$  n'ont pas même milieu.

1. Faire une figure.

Compléter cette figure au fil des questions et la joindre à la copie.

2. Justifier qu'il existe une rotation  $\mathcal{R}_1$  qui transforme A en B et C en D.

Déterminer son angle  $\alpha_1$  et construire sur la figure son centre I. (On expliquera la construction.)

3. Justifier qu'il existe une rotation  $\mathcal{R}_2$  qui transforme D en A et B en C.

Déterminer son angle  $\alpha_2$  et construire sur la figure son centre J. (On expliquera la construction.)

4. On désigne par M le milieu de  $[AC]$  et N celui de  $[BD]$ . Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.

5. Soit P le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre  $[AB]$ , et Q le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre  $[CD]$ .

a. Déterminer les angles  $(\vec{IA}, \vec{IP})$ ,  $(\vec{IC}, \vec{IQ})$  et calculer les rapports

$$\frac{IP}{IA} \text{ et } \frac{IQ}{IC}.$$

b. Préciser l'angle et le rapport de la similitude de centre I qui transforme A en P et C en Q.

c. En déduire que J est le milieu de  $[PQ]$ .

EXERCICE 2

4 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}.$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(0; 1, 1)$  (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x.$$

a. Étudier le sens de variation de  $g$  et calculer  $g(1)$ .

b. En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ .

2. a. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

- b. Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
  - c. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  et étudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $\Delta$ .
  - d. Déterminer les coordonnées du point A de  $(\mathcal{C})$  sachant que  $(\mathcal{C})$  admet en A une tangente T parallèle à  $\Delta$ .
  - e. Tracer  $(\mathcal{C})$ ,  $\Delta$  et T dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$ .  
Prouver que  $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$ .

**EXERCICE 3****4 points**

On désigne par  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On note I l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

1. Montrer que l'équation  $h(x) = x$  possède une solution unique  $x_0$  sur  $]0; +\infty[$  et que  $x_0$  appartient à I.
2. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à I,  $h(x)$  appartient aussi à I.
3. a. Calculer la dérivée  $h'$  de  $h$  et la dérivée seconde  $h''$  de  $h$ .  
b. Étudier les variations de  $h'$  sur I.  
c. En déduire que pour tout  $x$  de I on a  $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$ .
4. On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = h(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$  de  $\mathbb{N}$ .  
a. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ .  
b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_n - x_0|.$$

- c. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}}$ .
5. a. Déterminer le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ , on ait :  $\frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$ .  
b. Montrer que :  $|u_n - x_0| < 10^{-2}$ . Que représente  $u_{n_0}$  relativement à  $x_0$ ? Calculer  $u_{n_0}$  à  $10^{-2}$  près par défaut.

**EXERCICE 4****4 points**

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad Z_B = 1 - i, \quad Z_C = \frac{Z_A}{Z_B}.$$

1. a. Écrire  $Z_C$  sous forme algébrique.

- b. Déterminer le module et un argument de  $Z_A$  et de  $Z_B$ .
  - c. Écrire  $Z_C$  sous forme trigonométrique; en déduire les valeurs exactes  $\cos \frac{\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
2. Soit I le point d'affixe  $Z_I = 1$ .
- a. Quelle est la nature du triangle OIB?
  - b. Déterminer les images de I et B dans la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{12}$ .  
En déduire la nature du triangle OAC.

**EXERCICE 5****4 points**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx.$$

- 1. Calculer  $I_0$  et  $J_0$ .
- 2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.
  - a. En intégrant par parties  $I_n$  puis  $J_n$  montrer que  $I_n$  et  $J_n$  vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

- b. En déduire, pour  $n$  entier naturel non nul, les expressions de  $I_n$  et  $J_n$  en fonction de  $n$ .
- 3. Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .