Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Asie juin 1995 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan orienté, on considère deux droites orthogonales $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ et quatre points distincts A, B, C et D tels que :

- A et C sont sur $(\mathscr{D})$, B et D sont sur $(\mathscr{D}')$,
- AC = BD et $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$
- [AC] et [BD] n'ont pas même milieu.

1. Faire une figure.
   Compléter cette figure au fil des questions et la joindre à la copie.
2. Justifier qu'il existe une rotation $\mathscr{R}_1$ qui transforme A en B et C en D.
   Déterminer son angle α_1 et construire sur la figure son centre I. (On expliquera la construction.)
3. Justifier qu'il existe une rotation $\mathscr{R}_2$ qui transforme D en A et B en C.
   Déterminer son angle α_2 et construire sur la figure son centre J. (On expliquera la construction.)
4. On désigne par M le milieu de [AC] et N celui de [BD]. Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.
5. Soit P le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre [AB], et Q le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre [CD].
   a. Déterminer les angles $\left(\overrightarrow{\text{IA}},\ \overrightarrow{\text{IP}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{IC}},\ \overrightarrow{\text{IQ}}\right)$ et calculer les rapports $\dfrac{\text{IP}}{\text{IA}}$ et $\dfrac{\text{IQ}}{\text{IC}}$.
   b. Préciser l'angle et le rapport de la similitude de centre I qui transforme A en P et C en Q.
   c. En déduire que J est le milieu de [PQ].

EXERCICE 2 **4 points**

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

   a. Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ et étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point A de $(\mathscr{C})$ sachant que $(\mathscr{C})$ admet en A une tangente T parallèle à Δ.
   e. Tracer $(\mathscr{C})$, Δ et T dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0.
   Prouver que $\dfrac{1}{2} \leqslant x_0 \leqslant 1$.

EXERCICE 3 **4 points**

On désigne par h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On note I l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ possède une solution unique x_0 sur $]0~;~+\infty[$ et que x_0 appartient à I.
2. Montrer que pour tout x appartenant à I, $h(x)$ appartient aussi à I.
3. **a.** Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h.
   b. Étudier les variations de h' sur I.
   c. En déduire que pour tout x de I on a $|h'(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.
   a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:
   $$|u_{n+1} - x_0| \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,|u_n - x_0|.$$
   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - x_0| \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$.
5. **a.** Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on ait : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$.
   b. Montrer que : $|u_n - x_0| < 10^{-2}$. Que représente u_{n_0} relativement à x_0 ? Calculer u_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

EXERCICE 4 **4 points**

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_{\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}, \quad Z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad Z_{\mathrm{C}} = \frac{Z_{\mathrm{A}}}{Z_{\mathrm{B}}}.$$

1. **a.** Écrire Z_{C} sous forme algébrique.
   b. Déterminer le module et un argument de Z_{A} et de Z_{B}.
   c. Écrire Z_{C} sous forme trigonométrique; en déduire les valeurs exactes $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
2. Soit I le point d'affixe $Z_{\text{I}} = 1$.
   a. Quelle est la nature du triangle OIB ?
   b. Déterminer les images de I et B dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.
   En déduire la nature du triangle OAC.

EXERCICE 5 **4 points**

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-nx} \sin x \, \text{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-nx} \cos x \, \text{d}x.$$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   a. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que I_n et J_n vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} I_n + nJ_n & = & 1 \\ -nI_n + J_n & = & \text{e}^{-\frac{n\pi}{2}} \end{array}\right.$$

   b. En déduire, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
3. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.