Baccalauréat S Asie juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne contient deux boules blanches et n noires, indiscernables au toucher.

   Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

   Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'évènement A_2 soit égale à $\dfrac{1}{15}$?

2. Dans **toute la suite du problème** on prend $n = 4$.

   A - Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :

   A_0 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules noires » ;

   A_1 l'évènement : « le joueur a tiré une boule noire et une blanche » ;

   A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

   a. Calculer la probabilité des évènements A_0 et A_1.

   b. Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée.

   Soit X le nombre de points marqués.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   Déterminer $\mathrm{E}(X)$.

B - Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.

Soit B_i l'évènement : « on obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » ($i = 0,\ 1$ ou 2).

a. Donner $p(B_0/A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.

Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.

En déduire que $p(B_0) = \dfrac{41}{75}$.

b. Montrer de même que $p(B_2) = \dfrac{2}{75}$.

En déduire $p(B_1)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

On considère le plan complexe P muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Soit le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4.$$

   Déterminer les réels u et v tels que $P(z) = (z-2)\left(z^2 + uz + v\right)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α.

   Soit A, B et C les points d'affixes respectives α, β et 2, I le milieu de [AB] et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   Déterminer l'affixe du point $r(\mathrm{B})$ et en déduire la nature du quadrilatère OACB.

3. Soit f l'application de P privé du point C dans P qui au point M d'affixe z ($z \neq 2$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z-(1+\mathrm{i})}{z-2}.$$

a. Déterminer f(A) et f(B).
Déterminer le point E tel que f(E) = C.

b. Quelles distances représentent les réels $|z-(1+\mathrm{i})|$ et $|z-2|$?
En déduire que si M appartient à la médiatrice de [AC], M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O$'$ et de rayons r et $2r$ tangents extérieurement en A, de diamètres respectifs [AB] et [AA$'$].
Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, et M' le point de $\mathscr{C}'$ tel que le triangle AMM' soit rectangle en A (on prendra pour la figure $r = 2$ cm)

1. a. Déterminer en justifiant les réponses :
— le rapport de l'homothétie h_1 de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$;
— le centre I de l'homothétie h_2 distincte de h_1 qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.
Placer I sur la figure.

b. On note $M_1 = h_1(M)$
Montrer que M_1 est le point de $\mathscr{C}'$ diamétralement opposé à M'.
Déterminer $h_2(M)$ et en déduire que la droite $\left(MM'\right)$ passe par un point fixe, lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

2. La droite $\left(MM'\right)$ recoupe $\mathscr{C}$ en N et $\mathscr{C}'$ en N'.
Quelle est l'image de N par h_2 ?
Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}N},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A}N'},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right) \mod (\pi)$ et en déduire que le triangle ANN' est rectangle en A.

3. Soit ω milieu de $[MM']$. Montrer que ω appartient à un cercle fixe dont on donnera le centre et le rayon (on pourra utiliser le milieu D de [OO$'$]).

PROBLÈME — 10 points

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - Étude pour $n = 1$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$.
Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_1$?

2. Étudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.

3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$, à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Étude pour $n = 2$

4. Déterminer $\lim_{x \to 0} f_2(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f_2(x)$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_2$?
5. Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau des variations de f_2.

Partie B

1. Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Partie C

n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On pose $F(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.
   Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1) I_n.$$

3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Partie D

1. En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

2. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1~;~\mathrm{e}]$, montrer que, pour tout n entier naturel non nul :

$$0 \leqslant I_n \leqslant 1.$$

3. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.