Baccalauréat C Asie juin 1998

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, ayant comme unité graphique 3 cm. Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle $\left(\rho e^{i\theta}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0.$$

On pose $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$. Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan P.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Calculer l'affixe z_3 du point $\text{M}_3 = r(\text{M}_2)$. Placer M_3 sur la figure précédente.

3. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$.
Calculer l'affixe z_4 du point $\text{M}_4 = t(\text{M}_2)$.
Placer M_4 sur la figure.

4. Soient $z_5 = \dfrac{\text{i}}{2}(1+\text{i}\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{\text{i}-\sqrt{3}}$.
Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
Placer les points M_5 et M_6 d'affixes respectives z_5 et z_6 sur la figure.

5. **a.** Calculer z_k^6 pour $k \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

   b. Écrire $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^\star$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{\text{e}} (\ln x)^n\,\text{d}x$.

1. **a.** Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,\text{e}[$, et pour tout n entier naturel, on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$

   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2. **a.** Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

   b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \text{e} - (n+1)I_n$.

   c. En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3. **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.

   b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \text{e}$.

   c. En déduire la limite de I_n.

   d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique étant 1 cm.

1. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x = f(t) & = & \dfrac{1}{2}\left(t^2+2\right) \\ y = g(t) & = & \dfrac{1}{2}\left(t^3+2t\right) \end{array}\right. ,~t \in \mathbb{R}$$

   a. Montrer que $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

   b. Étudier conjointement les variations des fonctions f et g sur $[0\,;+\infty[$.

   c. Préciser la tangente au point de paramètre $t = 0$.

   d. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

2. Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$.

   a. Tracer $(\mathcal{P})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

   b. Vérifier qu'une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 \\ y(t) & = & 2t \end{array}\right. ,~t \in \mathbb{R}$$

   c. Soit (D_t) la tangente à $(\mathcal{P})$ au point M_t de coordonnées $(x(t)~;~y(t))$.
   Soit (Δ_t) la perpendiculaire à (D_t) au point M_t. Montrer qu'une équation cartésienne de (Δ_t) est :

$$Y = -\,tX + t^3 + 2t.$$

   d. Pour $t \in \mathbb{R}^{\star}$, (Δ_t) coupe l'axe des abscisses en un point A_t et l'axe des ordonnées en un point B_t. On appelle I_t le milieu du segment $[A_tB_t]$.
   Exprimer en fonction de t les coordonnées du point I_t.

PROBLÈME **11 POINTS**

I

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout x associe :

$$g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2.$$

1. **a.** Montrer que la dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est

$$g'(x) = x(\mathrm{e}^x + 2)$$

   b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   Montrer que α est dans l'intervalle $\mathrm{I} = \left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$.

II

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x}$$

1. Montrer que les équations : $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0\,;\,+\infty[$, et que, par suite, l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique sur I.
2. **a.** Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variation de f.

   d. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur $[0\,;\,+\infty[$ dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

III

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient à I.
2. Soit la suite $(u_n)_{u\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ pour tout } n > 1 \end{cases}$

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \in I$.

   b. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

   $$\text{pour tout } n > 1,\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|.$$

   d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   e. En déduire que (u_n) converge vers α.

   f. *A priori*, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près?
3. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.