

∞ Baccalauréat S Asie juin 2004 ∞

• L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisé

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

À chacune des trois affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX ».
Aucune justification n'est demandée.

Données	Affirmations	Réponses
f est la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, \mathcal{C} est la courbe représentative de f dans un repère du plan.	La tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x$.	
G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A; -1), (B; 1), (C; 4)\}$	L'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$, est une homothétie de rapport -3 .	
$f(x) = x \sin 3x$	Les solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ sont : 0 ; $\frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{18} + 2k'\frac{\pi}{3}$, k et k' sont des entiers relatifs.	

Le barème est le suivant :

- Réponse exacte : 1 point.
- Réponse fautive : $-0,5$ point.
- Absence de réponse : 0 point.
- La note attribuée à l'exercice ne peut être négative.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, unité graphique 1 cm.
Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}.$$

1. Recherche des points invariants par f .
 - a. Développer $(z - 7i)(z + i)$.
 - b. Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.
2. On appelle Σ le cercle de diamètre [BC]. Soit M un point quelconque de Σ , distinct de B et de C, soit M' son image par f .
 - a. Justifier que l'affixe z de M vérifie : $z = 3i + 4e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel.
 - b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de θ et en déduire que M' appartient aussi à Σ .
 - c. Démontrer que $z' = -\bar{z}$ et en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M' .
3. On considère un cercle de centre A, de rayon $r > 0$. Déterminer l'image de ce cercle par f .

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
 - a. Montrer que si a existe, a est impair.
 - b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
 - a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
 - b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
 - c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.
3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 - a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.
 - b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2 c démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

L'espace \mathcal{E} est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle \mathcal{P} le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et \mathcal{Q} le plan d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont sécants en une droite \mathcal{D} dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 5 \\ z = 5\alpha + 5 \end{cases} \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier précisément vos réponses :

- Affirmation 1 : \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{R} d'équation : $-5x + 5y - z = 0$.

Soit \mathcal{D}' la droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 + 2\beta \end{cases} \quad \text{où } \beta \text{ est un nombre réel.}$$

- Affirmation 2 : \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont coplanaires.

EXERCICE 4**8 points****Commun à tous les candidats****I : première partie étude d'une fonction f**

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ par

$$f(x) = \ln(1 + 2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.
 - a. Étudier les variations de g sur l'intervalle I .
 - b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β , appartenant à l'intervalle $]1; 2[$.
 - c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I .
4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; \beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0; \beta[$.

II : deuxième partie étude d'une suite récurrente

On appelle $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $]0; \beta[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

III : troisième partie Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
2. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $\int_{u_n}^{\beta} f'(t) dt \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $\beta - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leq \beta - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 - c. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$?