

♣ Baccalauréat S Asie 19 juin 2014 ♣

**Exercice 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.*

*Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.*

*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points  $A(1 ; -1 ; -1)$ ,  $B(1 ; 1 ; 1)$ ,  $C(0 ; 3 ; 1)$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x + y - z + 5 = 0$ .

**Question 1**

Soit  $\mathcal{D}_1$  la droite de vecteur directeur  $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$  passant par A.

Une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}_1$  est :

**a.** 
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**b.** 
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**c.** 
$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**d.** 
$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Question 2**

Soit  $\mathcal{D}_2$  la droite de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- a. La droite  $\mathcal{D}_2$  et le plan  $\mathcal{P}$  ne sont pas sécants.
- b. La droite  $\mathcal{D}_2$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .
- c. La droite  $\mathcal{D}_2$  et le plan  $\mathcal{P}$  se coupent au point  $E\left(\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$ .
- d. La droite  $\mathcal{D}_2$  et le plan  $\mathcal{P}$  se coupent au point  $F\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{22}{3}\right)$ .

**Question 3**

- a. L'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et du plan (ABC) est réduite à un point.
- b. Le plan  $\mathcal{P}$  et le plan (ABC) sont confondus.
- c. Le plan  $\mathcal{P}$  coupe le plan (ABC) selon une droite.
- d. Le plan  $\mathcal{P}$  et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

**Question 4**

Une mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$  arrondie au dixième de degré est égale à :

- a.  $22,2^\circ$
- b.  $0,4^\circ$
- c.  $67,8^\circ$
- d.  $1,2^\circ$

**Exercice 2**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne  $\mu = 45,5$  et d'écart-type  $\sigma$ .

**Partie A**

On note  $Z$  la variable aléatoire  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 45,5}{\sigma}$ .

- Quelle est la loi de la variable aléatoire  $Z$ ?
  - Déterminer  $P(X \leq \mu)$ .
- En prenant  $\sigma = 3,8$ , déterminer  $P(37,9 \leq X \leq 53,1)$ . Arrondir le résultat au centième.

**Partie B**

Une certaine maladie  $V$  est présente dans la population française avec la fréquence 1 %. On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie  $V$  dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.

On note  $\alpha$  l'unique réel tel que  $P(X \leq \alpha) = 0,995$ , où  $X$  est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer  $\alpha$ .

On définit les évènements :

$M$  « l'individu est porteur de la maladie  $V$  » ;

$S$  « l'individu a plus de 50 ans » ;

$H$  « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à  $\alpha$  ».

Ainsi  $P(M) = 0,01$ ,  $P_M(S) = 0,9$  et  $P(H) = P(X > \alpha)$ .

D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à  $\alpha$  sont porteurs de la maladie  $V$ .

- Déterminer  $P(M \cap S)$ .
  - On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie  $V$  est égale à 0,03.
- Calculer la probabilité  $P(H)$ .
  - L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à  $\alpha$ . Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie  $V$ . Arrondir au millième.

**Partie C**

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie  $V$ .

- Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie  $V$  dans les échantillons de taille 1 000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.

2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V.

Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie?\*

### Exercice 3

5 points

#### Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction  $g$  définie sur  $[-1 ; 1]$  par

$$g(x) = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax})$$

où  $a$  est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction  $g$ .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel  $a$  soit une solution strictement positive de l'équation

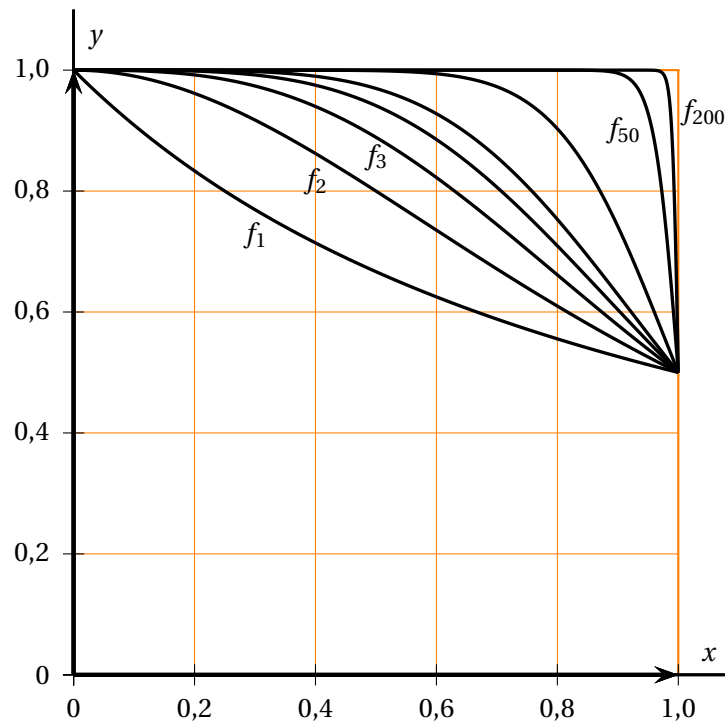
$$(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur  $[0 ; +\infty[$  la fonction  $f$  par  $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$  pour tout réel  $x \geq 0$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
Vérifier que  $f'(0) = -2$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ .
2. On note  $f''$  la fonction dérivée de  $f'$ .  
Vérifier que, pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $f''(x) = 4xe^{2x}$ .
3. Montrer que, sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  la fonction  $f'$  s'annule pour une unique valeur, notée  $x_0$ .
4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , puis montrer que  $f(x)$  est négatif pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; x_0]$ .  
b. Calculer  $f(2)$ .  
En déduire que sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , la fonction  $f$  s'annule pour une unique valeur.  
Si l'on note  $a$  cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de  $a$  arrondie au centième.
5. On admet sans démonstration que la longueur  $L$  de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre  $a$ .\*

**Exercice 4****5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit le nombre  $I_n$  par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions  $f_n$  obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite  $(I_n)$  l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Calculer la valeur exacte de  $I_1$ .
3. a. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $I_n \leq 1$ .

4. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1 + x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale  $\int_0^1 (1 - x^n) dx$ .
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
7. On considère l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$n, p$ et $k$ sont des entiers naturels $x$ et $I$ sont des réels
<b>Initialisation :</b>	$I$ prend la valeur 0
<b>Traitement :</b>	Demander un entier $n \geq 1$ Demander un entier $p \geq 1$ Pour $k$ allant de 0 à $p - 1$ faire : $x$ prend la valeur $\frac{k}{p}$ $I$ prend la valeur $I + \frac{1}{1 + x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin Pour Afficher $I$

- a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs  $n = 2$  et  $p = 5$ ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de  $I$  seront arrondies au millième.

$k$	$x$	$I$
0		
4		

- b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale  $I_n$ .\*

#### Exercice 4

5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

#### Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .  
On considère le nombre  $E$  produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1.$$

Démontrer que  $E$  est un entier supérieur ou égal à 2, et que  $E$  est premier avec chacun des nombres  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

2. En utilisant le fait que  $E$  admet un diviseur premier conclure.

### Partie B

Pour tout entier naturel  $k \geq 2$ , on pose  $M_k = 2^k - 1$ .

On dit que  $M_k$  est le  $k$ -ième nombre de Mersenne.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de  $M_k$  :

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_k$	3								

- b. D'après le tableau précédent, si  $k$  est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre  $M_k$  est premier ?
2. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls.
- a. Justifier l'égalité :  $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \dots + (2^p)^{q-1} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$ .
- b. En déduire que  $2^{pq} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$ .
- c. En déduire que si un entier  $k$  supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors  $M_k$  ne l'est pas non plus.
3. a. Prouver que le nombre de Mersenne  $M_{11}$  n'est pas premier.
- b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

### Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2.$$

Si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre  $M_n$  est premier si et seulement si  $u_{n-2} \equiv 0 \pmod{M_n}$ . Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne  $M_5$  est premier.
2. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.  
L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne  $M_n$  est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

<b>Variables :</b>	$u, M, n$ et $i$ sont des entiers naturels
<b>Initialisation :</b>	$u$ prend la valeur 4
<b>Traitement :</b>	Demander un entier $n \geq 3$ $M$ prend la valeur ..... Pour $i$ allant de 1 à ...faire $u$ prend la valeur ... Fin Pour Si $M$ divise $u$ alors afficher « $M$ ..... » sinon afficher « $M$ ..... »

Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue. \*