# Baccalauréat S Asie juin 2001

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

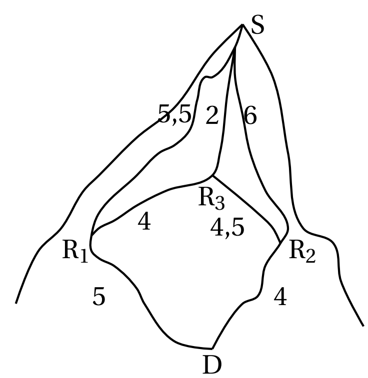
Pour rejoindre le sommet S d'une montagne des Alpes à partir d'un point de départ D, les randonneurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges se trouvant à la même altitude de 1 400 mètres sur les parcours existants; les deux refuges ne sont pas situés au même endroit. On les appelle $R_1$ et $R_2$.

Le lendemain matin, pour atteindre le sommet qui se trouve à 2 500 mètres d'altitude, ils ont deux possibilités : ils peuvent atteindre le sommet en faisant une halte au refuge $R_3$, ou atteindre le sommet directement.

La probabilité que les randonneurs choisissent de passer par $R_1$ est égale à $\dfrac{1}{3}$.

La probabilité de monter directement au sommet en partant de $R_1$ est égale à $\dfrac{3}{4}$.

La probabilité de monter directement au sommet en partant de $R_2$ est égale à $\dfrac{2}{3}$.




1. Tracer un arbre pondéré représentant tous les trajets possibles du départ D jusqu'au sommet S.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   $E_1$ : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge $R_3$ sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge $R_1$ »;

   $E_2$ « Les randonneurs ont fait une halte au refuge $R_3$ »;

   $E_3$ « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge $R_1$ sachant qu'ils ont fait une halte au refuge $R_3$ »;

   $E_4$ « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge $R_2$ sachant que, le deuxième jour, ils sont montés directement au sommet S ».
3. On note $d(M,\ N)$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point $M$ au point $N$.

   On donne $d(\mathrm{D}, \mathrm{R}_1) = 5$; $d(\mathrm{D}, \mathrm{R}_2) = 4$; $d(\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_3) = 4$; $d(\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3) = 4{,}5$;

   $d(\mathrm{R}_3, \mathrm{S}) = 2$; $d(\mathrm{R}_1, \mathrm{S}) = 5{,}5$; $d(\mathrm{R}_2, \mathrm{S}) = 6$.

   Soit $X$ la variable aléatoire qui représente la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.

   **a.** Déterminer la loi de probabilité de $X$.

   **b.** Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On appelle $f$ l'application qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ $(z \neq -1)$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \frac{-\mathrm{i}z - 2}{z+1}.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2\mathrm{i}$ et $c = -\mathrm{i}$.

1. Soit C$'$ l'image du point C par $f$. Donner l'affixe $c'$ du point C$'$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe $d$ du point D ayant pour image par f le point D$'$ d'affixe $d' = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe $z$ différent de $-1$, on note $p$ le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et $p'$ le module de $z' + \mathrm{i}$ (c'est-à-dire $\left|z' + \mathrm{i}\right| = p'$).
   **a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$ différent de $-1$, on a : $pp' = \sqrt{5}$.
   **b.** Si le point $M$ appartient au cercle $(\Gamma)$ de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle $(\Gamma')$, dont on précisera le centre et le rayon.
4. Pour tout nombre complexe $z$ différent de $-1$, on considère le nombre complexe $\omega = \dfrac{z - 2\mathrm{i}}{z+1}$.
   **a.** Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe $\omega$.
   **b.** Montrer que $z' = -\mathrm{i}\omega$.
   **c.** Déterminer l'ensemble (F) des points $M$ d'affixe $z$ telle que $z'$ soit un réel non nul.
   **d.** Vérifier que le point D appartient aux ensembles $(\Gamma)$ et (F).
5. Représenter les ensembles $(\Gamma)$, (F) et $(\Gamma')$ en prenant 4 cm pour unité graphique.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère l'application $f$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :
$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$
   **a.** Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de $z$.
   **b.** Montrer que $f = \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).

**c.** Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que $f$ est une réflexion, dont on donnera l'axe $(D_1)$.

Réaliser une figure, en y représentant l'axe $(D_1)$ (unité graphique 2 cm).

**2.** On considère l'application $g$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M''$ d'affixe $z''$ telle que :

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**a.** Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de $g$.

**b.** Montrer que $g = \mathrm{T} \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).

**c.** Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que $g$ est une réflexion, d'axe noté $(D_2)$.

**d.** Quelle est l'image par $g$ du point A d'affixe $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En déduire une construction de la droite $(D_2)$, qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

## PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction $f$, définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

### ⋆ I. Étude de la fonction $f$ et tracé de $(\mathscr{C})$

**1. a.** Calculer la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**b.** Calculer la limite de cette fonction lorsque $x$ tend vers $-1$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ ?

**2.** Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$.

**3.** Dresser le tableau de variation de $f$.

**4.** Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0 (unité graphique : 4 cm).

**5.** Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée $\alpha$, dans l'intervalle $[1\,;\,10]$.

Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs $a$ et $b$ tels que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[a\,;\,b]$.

### ⋆ II. Calcul d'une aire

**1.** Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

**a.** Étudier le sens de variation de $g$ dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.

**b.** Montrer que, pour tout $x$ appartenant à $[1\,;\,2]$, on a : $1 \leqslant g(x) \leqslant 2,5$.

**c.** En déduire un encadrement de $\mathrm{A}_1 = \displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

**2.** Soit $\mathrm{A}_2$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe $(\mathscr{C})$ et l'axe des abscisses.

À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\mathrm{A}_2$ en fonction de $\mathrm{A}_1$, et en déduire un encadrement de $\mathrm{A}_2$.

$\star$ **III.** Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\beta$ et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Soit $h$ la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^3}$.

**1. a.** Vérifier que, pour tout $x$ appartenant à $]-1\,;\,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = f(x) - 2h(x).$$

**b.** Calculer $h'(x)$.

**c.** En utilisant la question **a**, calculer $f''(x)$.

En déduire le sens de variation de $f$ dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$

**d.** En déduire que, pour tout $x$ appartenant à $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ on a :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

**2.** On définit la suite $(U_n)$, pour tout nombre entier naturel $n$, par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geqslant 0$.

On admet que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant 1$.

(Question hors-programme en 2002).

**a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a :

$$\left|U_{n+1} - \beta\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|U_n - \beta\right|.$$

**b.** Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a :

$$\left|U_n - \beta\right| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

**c.** En déduire une valeur approchée numérique de $\beta$ à $10^{-3}$ près.