Atelier « enseignement de la géométrie et recherche en didactique »

L'atelier a débuté par la présentation de notre invitée, Marie-Jeanne Perrin-Glorian et des travaux qu'elle a menés au cours de sa carrière. Elle est actuellement professeure émérite à l'université d'Artois et membre du laboratoire de didactique André Revuz, elle a auparavant participé à l'équipe de création de l'IREM de Paris, enseigné à Paris 7 et travaillé à l'IUFM Nord-Pas de Calais (formations en maternelle, primaire, PLC2). Un de ses objectifs récents est de penser la continuité de l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité.

Marie-Jeanne Perrin a d'abord rappelé des distinctions à prendre en compte quand on parle de géométrie :
- géométrie comme modèle permettant de résoudre des problèmes de l'espace (problème du charpentier qui doit découper des pièces de bois au sol pour les assembler à 10 m du sol) versus géométrie comme théorie assurant la consistance de ce modèle (Brousseau 2000)- connaissances spatiales (la pratique sur des objets « réels » justifie les méthodes utilisées) versus connaissances géométriques (les justifications utilisent des objets « idéaux » et leurs propriétés) : Berthelot et Salin 1992 ;
- les trois paradigmes de C. Houdement et A. Kuzniak (2000) : géométrie naturelle (« G1 »), géométrie axiomatique naturelle (« G2 ») et géométrie axiomatique formaliste (« G3 »), différentes notamment par le mode de validation des énoncés, ce qui explique une partie des difficultés rencontrées dans l'enseignement de la géométrie. Les moyens de contrôle attendus des élèves évoluent au cours de la scolarité : reconnaissance perceptive en maternelle et au début du cycle 2 ; vérification par des instruments introduits progressivement au cycle 2 et au cycle 3, par les énoncés et la démonstration au cycle 4.
- ces travaux affinent des travaux plus anciens qui identifiaient déjà une rupture entre une géométrie des tracés matériels et la géométrie théorique des énoncés et des démonstrations (Laborde 1990).

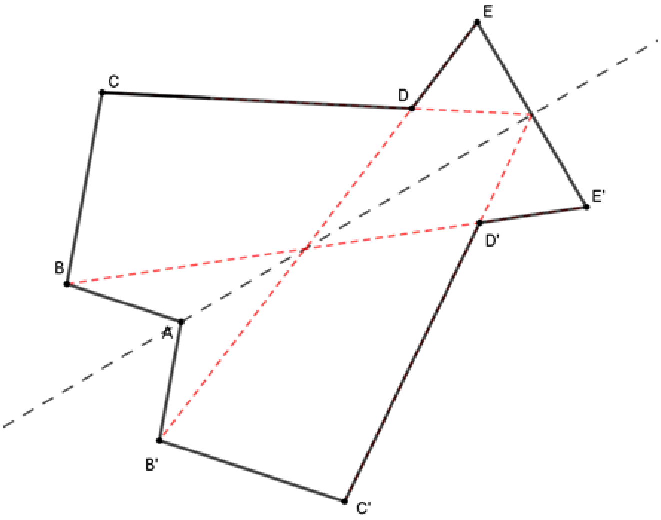
Marie-Jeanne Perrin a ensuite parlé des aspects sémiotiques, le langage naturel différant fortement du langage mathématique (symbolisme et figure) : Colette Laborde (1982) a étudié la langue mathématique et explique que deux codes y sont en interaction : la langue naturelle et l'écriture symbolique ; en géométrie, il y a en plus la figure et son codage. Raymond Duval (1994, 2005) montre aussi la difficulté d'articuler texte et figure en géométrie : la perception naturelle des figures comme dessin n'est pas la visualisation qu'on attend d'une figure géométrique. Il y a plusieurs appréhensions des figures : perceptive, séquentielle, opératoire, discursive et une déconstruction dimensionnelle est nécessaire pour une appréhension discursive. Pour utiliser les énoncés géométriques, il faut voir la figure comme engendrée par des lignes et des points et le point comme intersection de lignes. C'est particulièrement net dans l'utilisation des transformations géométriques comme l'illustre un exercice simple sur la symétrie centrale où il s'agit de montrer que si des points M et N sont situés sur des côtés opposés d'un parallélogramme et alignés avec le centre O de ce parallélogramme, alors O est le milieu de [MN].

Un petit moment d'échange a suivi ces premières indications, où chacun a pu dire comment il vivait ces différences et les difficultés d'enseignement, voire la méconnaissance qu'il (ou ses collègues) avait de ces différences et ces ruptures.

Marie-Jeanne Perrin a ensuite présenté ce qu'elle a appelé *géométrie des tracés* (Perrin-Glorian et Godin, 2018) visant, pour le cycle 3, des objectifs de conceptualisation des notions géométriques à partir de reproduction de figures avec des instruments. Un LÉA (lieu d'éducation associé à l'institut français de l'éducation) associant chercheurs et enseignants, travaille à la création de ressources pour les enseignants dans l'esprit de cette démarche. Marie-Jeanne Perrin a donné de nombreux exemples pour illustrer cette démarche (voir diaporama), En voici quelques-uns

- Une évaluation en début de 6e qui montre que les élèves ont du mal à identifier les éléments pertinents nécessaires à la reproduction d'une figure avec les instruments.

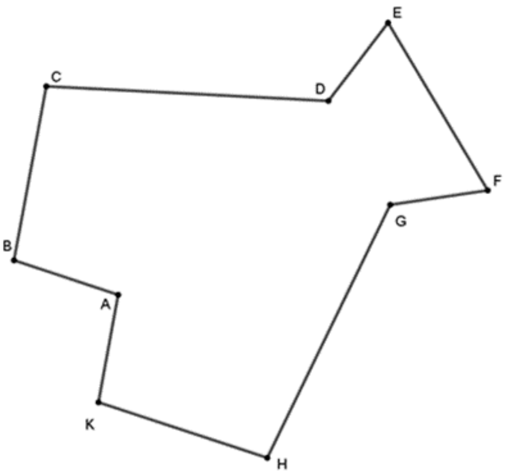
- Une situation d'introduction de la symétrie axiale en sixième avec comme support la figure suivante :



Il s'agit de s'appuyer sur la perception intuitive de la symétrie pour dégager dans un premier temps des constructions avec les instruments et dans un deuxième temps les notions géométriques sous-jacentes.

Phase 1 : collective

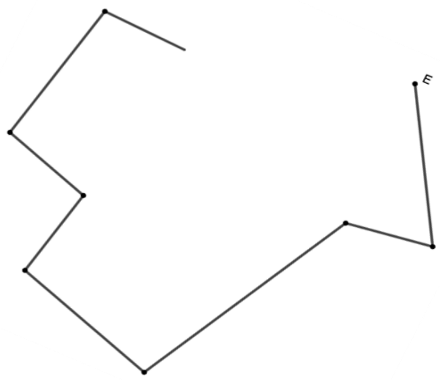
- On distribue aux élèves la figure (contour seul et dénomination neutre des sommets A, B, C, D, E, F, G, H).
  - Trouver des propriétés que vérifie cette figure. Les élèves parlent de symétrie.
  - Trouver l'axe de symétrie
  - Trouver des alignements.



Les alignements indiqués en pointillés rouges sur la première figure sont confirmés par l'enseignant. Les élèves gardent leur figure modèle pour la suite avec leurs propres tracés qui ne sont pas nécessairement ceux indiqués sur la première figure.

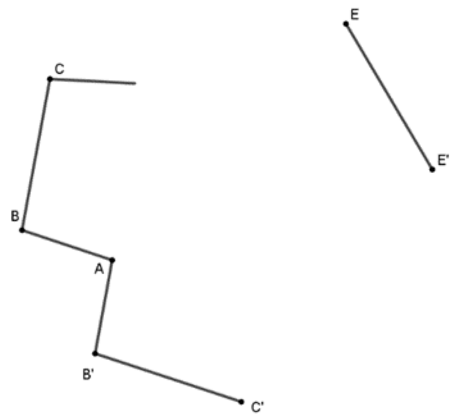
Phase 2 : individuelle

Il s'agit de reconstruire la figure à partir de « l'amorce » suivante :

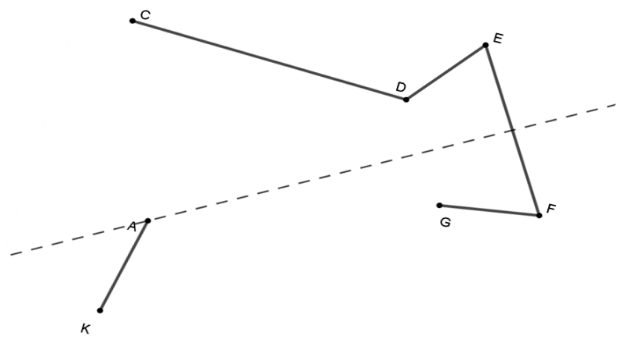


- Remettre les noms des sommets oblige les élèves à bien regarder le modèle et à identifier ce qui manque
- Compléter la figure pour retrouver le modèle
- La figure est de taille différente dans chaque phase

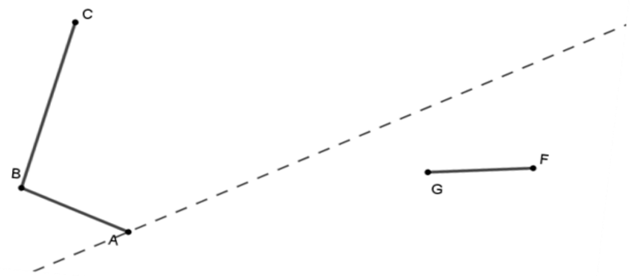
Phase 3 : Consolidation de la phase 2

Un autre sommet à restaurer. À l'issue de la phase 3 on institutionnalise l'intersection de droites symétriques sur l'axe de symétrie et la conservation des longueurs.	

Phase 4 : avec l'amorce suivante

• L'axe de symétrie est déjà placé, et cette fois on peut utiliser l'équerre et le report de longueur sur une droite déjà tracée. • Relation entre un point et son symétrique. Objectif : comprendre que pour obtenir une figure il suffit d'obtenir les sommets de la figure. Mais cet objectif n'est pas simple et n'est pas toujours atteint, car beaucoup d'élèves continuent le travail avec la conservation des longueurs des segments et les alignements, alors qu'on aimerait qu'ils passent à la construction des points.	

Phase 5

• Consolidation de la phase 4 • Cette fois, la conservation des longueurs et les alignements ne suffisent plus ; il est nécessaire de construire le symétrique d'au moins un point.	

<u>Attendus</u>

Phase 1 : comment trouver l'axe de symétrie ? Assez vite, les élèves voient qu'il passe par le point A, et ensuite, le milieu du segment [EF]. Mais comment trouver le milieu du segment [EF] sans plier et sans mesurer ?

Phases 2 et 3 : dégager la relation entre les droites symétriques (elles se coupent sur l'axe de symétrie) et entre les segments symétriques (même longueur).

Les phases 4 et 5 servent à aboutir à la construction du symétrique d'un point sur feuille blanche. Mais la plupart des élèves n'ont pas utilisé l'équerre dans la phase 4, mais la conservation des longueurs des côtés et les alignements. Même après une mise en commun, la méthode de construction du symétrique d'un point n'est pas forcément comprise.

Phase 5 : cela « coince » car les élèves ne peuvent plus s'en sortir avec uniquement les reports de longueur. Ils sont obligés de construire le symétrique d'au moins un point.

Cette activité est un exemple de l'activité de « restauration de figure ».

La restauration de figures contribue à l'entrée dans la résolution de problèmes de géométrie car un des objectifs est de savoir ce que l'on a, ce qui nous manque et ce que l'on cherche.

Marie-Jeanne Perrin amorce ensuite une réflexion sur les fonctions des instruments de tracés dont elle fait l'hypothèse qu'ils jouent un rôle essentiel dans le passage du contrôle des figures par la seule perception, au contrôle par les énoncés.

- Elle s'intéresse à des instruments théoriques définis par une seule fonction liée à la conceptualisation d'une notion géométrique précise.
- Les instruments matériels sont limités, les instruments théoriques non.
- D'autres instruments que les instruments usuels permettent de reporter de l'information sur les figures.
  - Gabarits et pochoirs : toute l'information sur une figure simple (une figure simple est celle qu'on obtient en faisant le contour d'un gabarit).
  - Papier calque : toute l'information sur une figure simple ou composée.
  - Gabarit ou pochoir déchiré : une partie de l'information sur une figure simple.

Fonctions géométriques des instruments matériels

Tracer un trait droit ou vérifier des alignements	Règle : droite, alignement
Reporter une longueur sur une droite qu'on a déjà	Règle informable : longueur, distance
Prendre un milieu	Bande de papier avec un bord droit qu'on peut plier : milieu d'un segment
Tracer un cercle	Compas : centre du cercle, rayon

Questionnement sur le passage de la ressource créée par des chercheurs avec des enseignants et les enseignants qui n'ont pas fait partie de l'équipe de recherche…

Quelle diffusion possible ? L'écrit est-il vraiment un bon moyen de diffusion ? La lecture de toute l'analyse du pourquoi cette activité, pourquoi cette ressource avec telle ou telle situation… est longue et compliquée à mettre à l'écrit, et les enseignants ne lisent pas forcément… L'idéal serait-il une diffusion avec accompagnement oral envers quelques collègues, les professeurs diffusant ensuite eux-mêmes leurs pratiques ?

Il faut réfléchir à cette diffusion pour que les activités ne soient pas dénaturées par l'ignorance des choix qui ont été faits et comment, pourquoi ils l'ont été : sans accompagnement, il y a un risque que les collègues qui les utilisent changent l'activité et n'obtiennent pas les résultats attendus car ils ignorent les raisons des choix qui ont été faits…

Le temps étant trop court pour poursuivre, Marie-Jeanne Perrin laisse son diaporama aux collègues désirant approfondir, et aussi l'adresse de la ressource du LÉA (qui n'est pas encore publique).

Tous les participants la remercient de son intervention.

Références

Berthelot R. Salin M.H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux 1.

Brousseau G. (2000), Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon 2000*. Université de Crète. Disponible sur https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/

Duval R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM,* 17, 121-138.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Houdement C., Kuzniak A (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20/1. 89-115.

Laborde C. (1982) : *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université J. Fourier, Grenoble.

Laborde C. (1990) L'enseignement de la géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 339-363.

Perrin-Glorian M.J. & Godin M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837.