

Atelier maths et navigation

Michel Soufflet, Journées APM de Laon octobre 2015

Nous avons commencé par une série de questions afin d'instaurer un dialogue avec les participants :

Questions d'introduction

1 Quelle différence y a t'il entre une carte marine et une carte routière ? Avec une carte d'état major ?

2 Sur une carte marine quelle distance correspond à une minute d'angle de latitude ? De longitude ?

3 La Terre étant considérée comme une sphère, quelle courbe géométrique correspond à l'orthodromie (route la plus courte) et à la loxodromie (route à cap constant) ?

4 Navigation à gisement constant : Quels dangers ?

Vous naviguez de nuit, sur tribord vous apercevez une lumière rouge dont l'angle avec votre cap est constant.

5 Triangulation

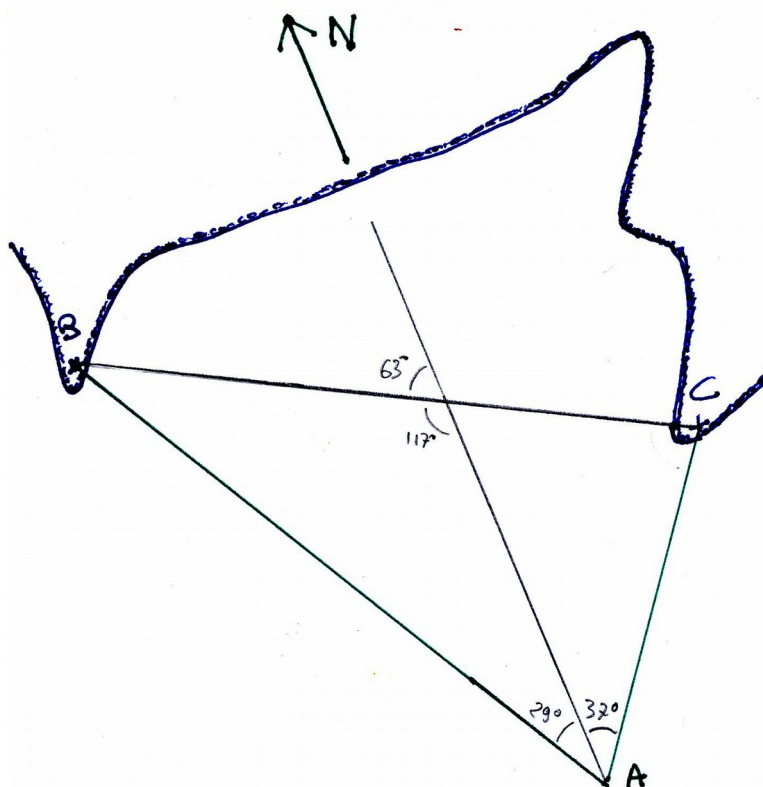
Du bateau A, on relève le phare de la déroute B au 331° (ou 29° ouest) et celui de la tourmente C au 37° . Sur la carte, on mesure la distance BC évaluée à 7,2 milles. La direction (CB) est au 297 relevée sur la carte.

Toutes les mesures d'angles sont données par rapport au nord géographique, c'est à dire que les rectifications à partir du nord compas sont faites.

Pouvez-vous calculer les distances AB et AC ?

L'épreuve du permis hauturier ne demande pas de savoir faire ces calculs mais seulement d'être capable d'évaluer ces distances avec précision par construction sur la carte. Toutefois, il est bien utile de savoir le faire, on ne dispose pas toujours de la bonne carte et il arrive que la construction déborde.

Ce calcul nécessite la connaissance des formules dites de triangulation qui figurent au programme de la classe de 1^{ère}S mais sont souvent négligées car considérées comme marginales.



6 Calculs de hauteur de marée

Le 28 octobre 2015 au matin, vous espérez arriver devant l'entrée du port de St Denis d'Oléron vers midi. Le seuil d'entrée est à + 1,30 m. L'indicateur des marées prévoit une marée haute à 7h avec une hauteur d'eau de 6,55 m, la suivante à 17h15 (hauteur 6,65 m) et une marée basse à 10h55 hauteur d'eau 0,45 m. Votre tirant d'eau est d'1,5 m et vous souhaitez garder un pied de pilote de 0,5 m par sécurité.

A quelle heure pourrez-vous entrer dans le port ?

Indication 1 : La hauteur de la marée varie suivant une fonction sinusoïdale.

Indication 2 : il y a trois bouées d'attente à l'entrée du port, pensez à amarrer votre bateau avant de commencer le calcul.

Réponses1

Les cartes d'état major conservent localement les surfaces, on dit qu'elles sont équivalentes.

Les cartes routières sont localement équidistantes, elles conservent donc les distances.

Les cartes marines doivent être conformes, c'est à dire conserver les angles.

La plus connue est celle de Mercator qui consiste à projeter la Terre sur un cylindre qui lui est tangent à l'équateur, elle est assez fidèle pour des latitudes faibles ou moyennes.

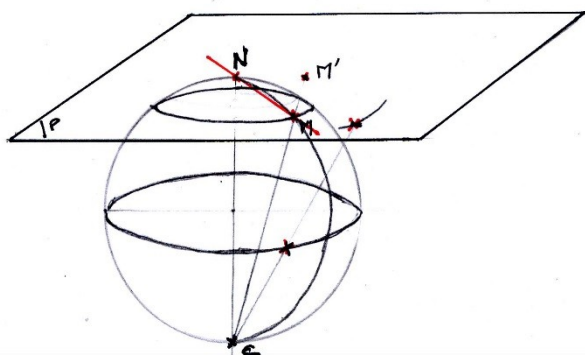
Nous avons insisté sur la carte stéréographique polaire car du point de vue mathématique elle correspond à une inversion, celle, ci dessous, qui consiste à choisir pour centre d'inversion le pôle sud et à projeter sur un plan tangent à la Terre au pôle nord, est peu déformatrice pour les latitudes élevées.

L'inversion est une transformation géométrique ponctuelle de l'espace euclidien E , définie à l'aide d'un point fixe A (pôle ou centre), et d'un réel non nul k (puissance), qui, à tout point M de $E - \{A\}$, associe le point M' de (AM) tel que

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = k$$

L'inversion peut aussi être définie par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{k}{AM^2} \overrightarrow{AM}$$



Réponses 2

Par définition du mètre, le quart du méridien vaut 10000 km, un degré de latitude vaut donc 10000 : 90 km et une minute vaut : 10000 : (90x60) soit 1,862 km. On reconnaît le mille marin (ou nautique), comme la Terre est un peu plus plate aux pôles, la définition du mille nautique est donnée pour une latitude de 45° ; cette précision est inutile en navigation.

Le rayon d'un parallèle de latitude L est $R \cos L$ si R est le rayon de la Terre. La minute d'angle de longitude à la latitude L vaut donc en milles nautiques : $\cos L$.

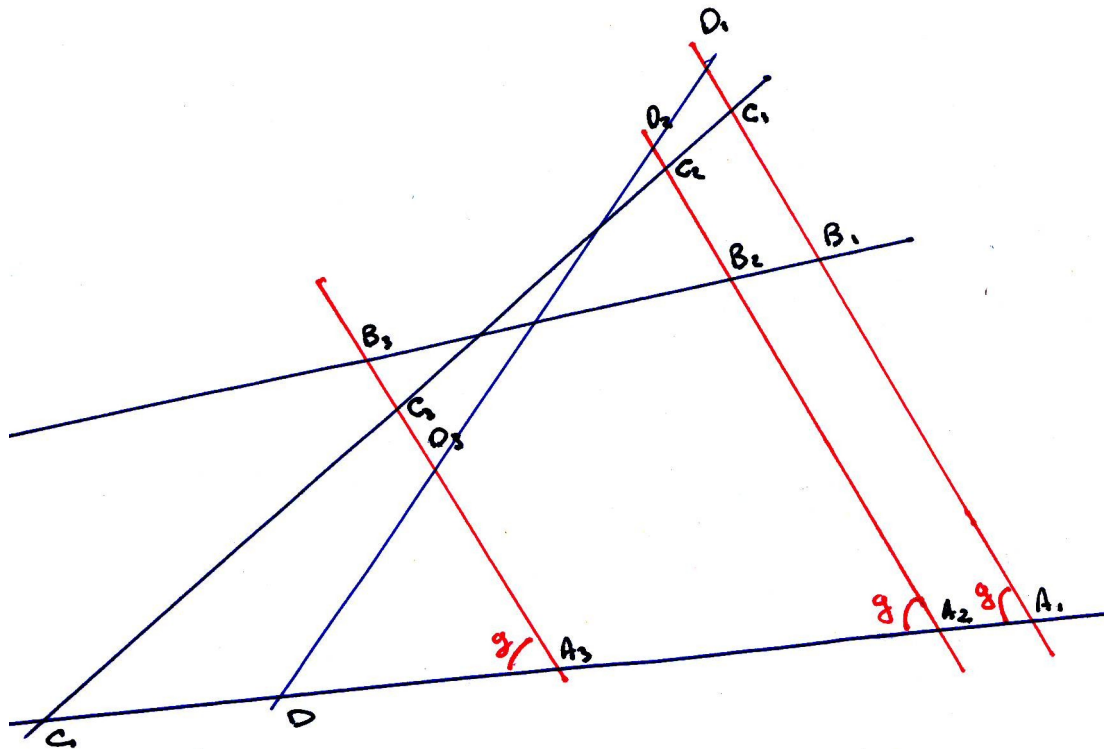
Réponses 3

Tous les participants connaissaient l'orthodromie : la distance la plus courte sur la sphère est le plus petit des deux arcs de grand cercle (dont le centre est celui de la Terre).

La loxodromie est une courbe moins connue, dans le plan la courbe dont l'angle tangentiel est constant est une spirale logarithmique d'équation polaire $r = a^{\theta}$.

Sur la Terre, la loxodromie est une portion de spirale logarithmique dont le centre est le pôle nord pour un cap inférieur à 90° ou supérieur à 270° et le pôle sud si le cap est entre ces deux valeurs. Bien sûr si le cap vaut 0 ou 180 c'est une portion de méridien et, s'il vaut 90 ou 270, c'est une portion de parallèle.

Réponse 4



Vous naviguez de nuit à cap et vitesse constants, de vos positions successives A_1, A_2, A_3 vous apercevez la lumière rouge d'un bateau, vous le supposez également à cap et vitesse constant, ce qui est généralement le cas.

Vous ne pouvez pas savoir s'il l'autre bateau est en B_i, C_i ou D_i mais, dans tous les cas, vous savez que vous allez le rencontrer. C'est une situation très dangereuse si l'autre bateau est de fort tonnage et donc peu manœuvrant.

Nous avons là une application directe du théorème de Thalès porteuse de sens en collège.

Remarque : l'autre bateau vous voit sous la forme d'une lumière verte car vous êtes sur son babord.

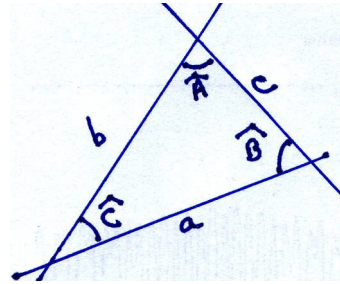
Réponse 5, Triangulation

Il faut se rappeler de la formule dite des sinus qui se démontre aisément au niveau du collège, dès que l'on connaît la définition du sinus.

L'aire du triangle ci-contre vaut 2 fois :

$$ab \sin C = bc \sin A = ac \sin B$$

En divisant cette double égalité par abc , on obtient : $\sin C / c = \sin A / a = \sin B / b$



C'est cette formule que Méchain et Delambre en vedette sur l'affiche des journées ont utilisée pour déterminer la longueur du méridien terrestre.

En l'utilisant et en se souvenant du fait que, dans le plan, la somme des angles d'un triangle vaut 180° , on trouve : $AB = 7,76$ milles et $AC = 4,41$ milles

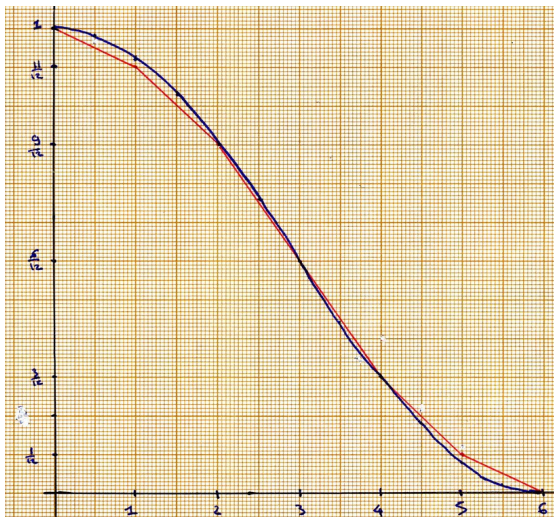
Réponse 6

Les marins utilisent la **règle des douzièmes**

Incontournable du permis hauturier cette règle permet de prévoir la hauteur d'eau dans un endroit donné en fonction de l'heure de la marée.

Elle stipule que, si on connaît la durée de la marée d_m , différence entre l'heure de la marée haute et celle de la marée basse, il faut calculer h_m , « l'heure marée » égale à $d_m/6$, alors au cours de ces 6 « heures » ainsi définies, la variation de hauteur sera respectivement de 1,2,3,3,2,1 douzième du marnage.

Le marnage m étant la différence de hauteur entre la marée haute et la marée basse.



La figure ci-contre met en évidence le fait que cette règle est une approximation linéaire par morceau d'une fonction cosinus (en bleu). Avant l'invention des calculatrices c'était un outil remarquable pour résoudre simplement ce type de problème. Désormais si on souhaite un calcul assez précis, il peut être plus simple de programmer la fonction.

Cette règle reste cependant excellente pour une évaluation grossière par calcul mental, évaluation souvent suffisante.

Pour faire « coller » la fonction cosinus à la règle des douzièmes, il suffit de chercher la fonction de type:

$$f(t) = a \cos(\omega t + \varphi) + b \text{ passant par les points .}$$

communs aux deux courbes. On trouve $a = b = m/2$, $\omega = \pi/6$ et $\varphi = 0$, ce qui nous donne :

$$f(t) = (m/2) \cos(\pi t/6) + m/2$$

Si t désigne le nombre d'heures marées et d_m la durée de la marée la fonction qu'il faut programmer sur une calculatrice en mode radian est:

$$f(t) = (m/2) \cos(\pi t/d_m) + m/2 \quad t \text{ et } d_m \text{ doivent être exprimés dans la même unité (minutes ou heures).}$$

Par exemple, si le marnage (différence de hauteur entre marée haute et marée basse) est de 6 m et la

durée de la marée de 363 mn, la hauteur d'eau sera de : $f(t) = 3 \cos(\pi t/363) + 3$.

2h20 soit 140mn après l'heure de la marée haute la hauteur d'eau sera: $f(140) = 4,05$ m au dessus de celle de la basse mer indiquée sur l'annuaire. Afin de connaître la hauteur d'eau sous le bateau (et donc de vérifier avec le sondeur), cette hauteur devra être ajoutée à celle de la marée basse et à celle indiquée sur la carte à cet endroit.

Cette fonction est celle d'une marée descendante, dans le cas d'une marée montante, on prendra $\varphi = -\pi$ soit:

$$f(t) = m/2 \cos(\pi t/d_m - \pi) + m/2$$

Si la durée de la marée descendante est égale à celle de la marée montante, on utilisera une seule fonction. Cette méthode est surtout intéressante si on dispose d'un écran pour représenter la fonction car la lecture graphique permet de répondre aux deux types de questions qui peuvent se poser:

Quelle hauteur d'eau à un moment donné? Jusqu'à quelle heure peut-on passer à cet endroit?

Sans perdre de vue que les estimations que l'on fait correspondent aux conditions atmosphériques des annuaires: pas de vent et pression normale. Près des côtes, un fort vent de terre peut faire baisser sensiblement le niveau de la marée de même qu'une situation anticyclonique. Prévoir 10 cm de hauteur d'eau en moins (en plus) pour 10 hp en plus(en moins). Ces formules ne sont applicables que lorsque la règle des douzièmes l'est, ce que l'on fait par défaut faute d'informations supplémentaires. Dans certains lieux à configuration particulière, les cartes marines proposent une lecture de la hauteur d'eau sous forme d'abaque, il convient alors de s'y référer. En baie de Seine, par exemple, l'étale de haute mer dure 2h (en vive eau), au lieu d'1h habituellement.

Remarque: la fonction ci-dessus est à programmer sur une calculette en mode radian.

En mode degré, il faut bien sûr prendre : $f(t) = (m/2) \cos(180t/d_m) + m/2$

Pour la même approximation, le SHOM propose $f(t) = m \sin^2(90t/d_m)$

C'est, bien sûr, la même fonction car $\cos(2x) = 2 \sin^2(x) - 1$

Les calculs montrent qu'il faudra attendre 2h 58 après le début de la marée montante soit 13h 53.

Cette capacité à prévoir la hauteur d'eau est essentielle car elle peut permettre de se repérer grâce au seul sondeur, même par temps de brouillard, lorsque les appareils électroniques sont en panne : lorsque la hauteur de la marée est de 4m, en restant sur une valeur de 14m au sondeur, vous pouvez suivre la ligne de sonde de 10m toujours indiquée sur les cartes marines.

L'atelier s'est déroulé dans une ambiance de dialogue très sympathique, nous avons évoqué également la navigation astronomique (au sextant) qui demande beaucoup d'expérience. Les mathématiques sous-jacentes à sa pratique n'ont pas d'application dans nos classes, elles sont dans le calcul des éphémérides. Les progrès dans ce domaine sont surtout la conséquence de la découverte des logarithmes comme outil de calcul et remontent au siècle des lumières. Copernic avait été excommunié, pas Képler, mais lui avait pu prévoir la position des planètes plusieurs années à l'avance ce qui a modifié les rapports entre sciences et religions.

Logiciels utiles :

open cpn 4.0.0 . Penser à charger avec les cartes du SHOM les vectorielles et les courants.

Couplé avec un GPS, ce logiciel permet de prévoir les fonds autour du bateau

Marées du Monde, essentiel si vous naviguez dans des zones pour lesquelles il n'y a pas d'annuaire de marées.

