première question supplémentaire. Cette méthode mène à une variable aléatoire suivant la loi binomiale.

Copie n°5 : ce groupe résout très rapidement la question en considérant l'événement contraire ! Heureusement qu'il y a des questions supplémentaires !

Copie n°6 : un arbre pondéré ne respectant pas les notations usuelles, ce qui n'a pas d'importance. La méthode est comprise, et il ne reste lors de la synthèse qu'à fixer les notations.

Copie n°7 : méthode semblable à la copie n°1, mais le raisonnement n'est pas écrit.

Copie n°8 : méthode des copies 1 et 6.

Copie n°9 : idem.

3. La synthèse en classe.

a. Le temps : la synthèse en classe, prise par les élèves dans le cahier de cours, est faite au tableau en dialogue avec la classe ; les copies sont montrées, commentées et certaines sont distribuées. Cette synthèse prend 6 heures, durant lesquelles la classe voit émerger les notions du cours de 1S. Cette synthèse sera suivi d'un cours « classique » s'appuyant sur des feuilles photocopiées.

b. La synthèse en classe.

Un problème de dés

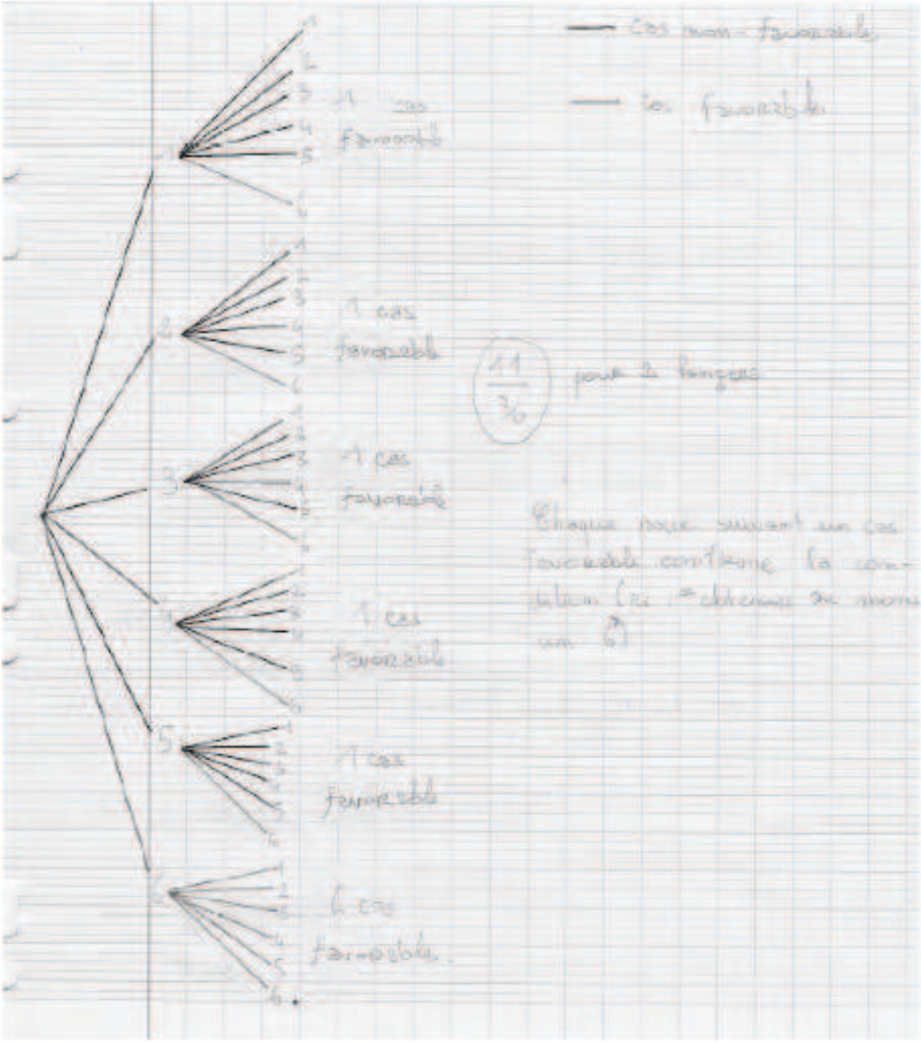
Synthèse

Rappel du problème : on lance un dé cubique équilibré n fois.

Le problème est de savoir à partir de quel n il est avantageux de parier qu'on obtiendra au moins un 6, c'est-à-dire à partir de quel n on a $p(E_n) \geq \frac{1}{2}$ avec E_n : « on obtient au moins une fois un 6 en n lancers ».

I. Méthode de dénombrement

1. Cas de deux lancers



Cette page est montrée à la classe, commentée et distribuée.

Arbre représentant toutes les possibilités. Une issue possible (ou résultat ou cas) est un couple ordonné (par exemple 2- 4).

L'ensemble des issues possibles est appelé « univers » (souvent noté Ω).

Situation d'équiprobabilité.

$$p(E_2) = \frac{nombre\ \ d'issues\ \ favorables}{nombre\ \ d'issues\ \ possibles}$$

La loi de probabilité est la loi équirépartie sur l'ensemble des issues possibles.

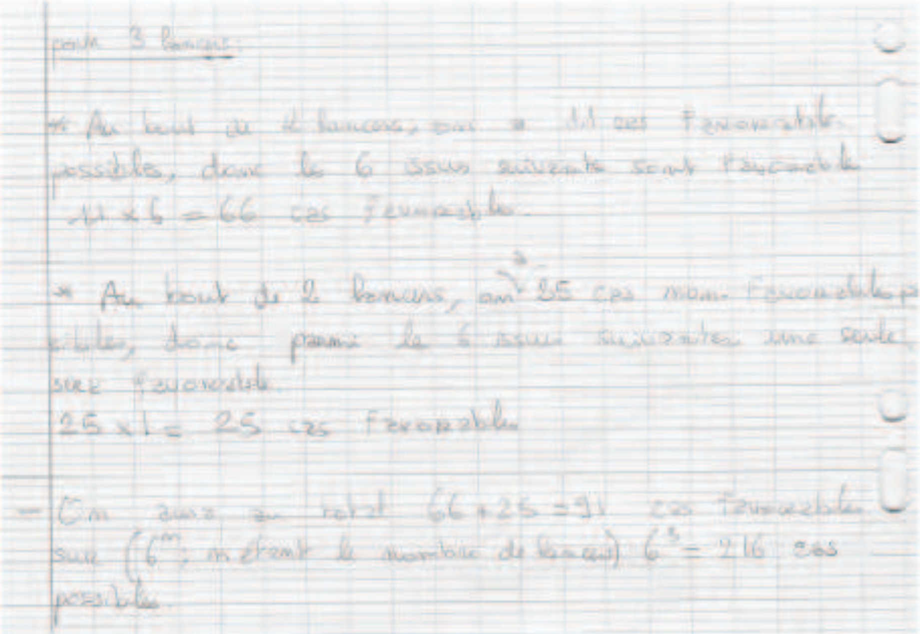
2. Cas suivants

a. Cas de trois lancers.

Il y a 6^3 issues possibles. En effet :

- On peut imaginer l'arbre : chacune des 36 branches de l'arbre précédent se scinde en 6 branches au troisième lancer.
- Ou bien on peut raisonner : pour chacune des 36 issues possibles des deux premiers lancers, il y a 6 issues possibles au troisième lancer.

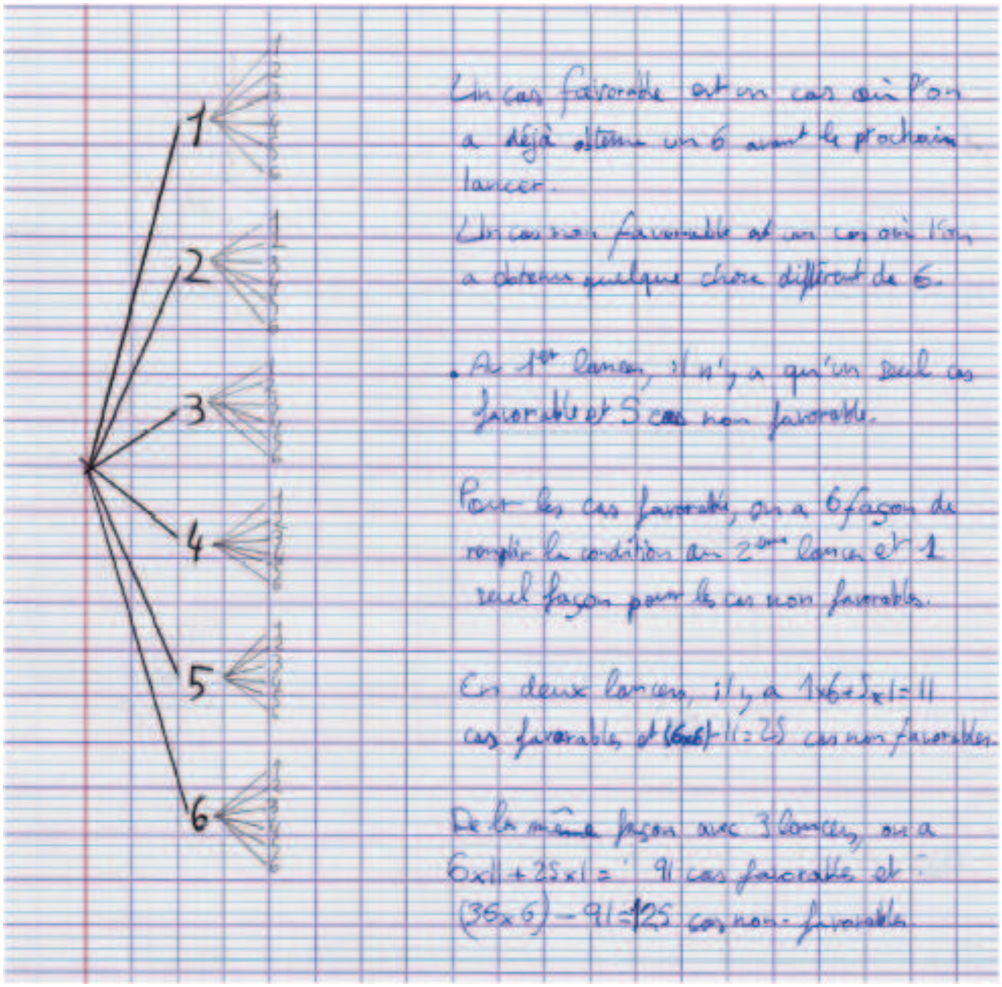
Comment connaître les issues favorables ?


pour 3 lancers :

* Au bout de 2 lancers, on a 11 cas favorable possibles, donc les 6 issues suivantes sont favorable
$11 \times 6 = 66$ cas favorable.

* Au bout de 2 lancers, on a 25 cas non favorable possibles, donc parmi les 6 issues suivantes une seule sera favorable.
$25 \times 1 = 25$ cas favorable

– On a donc au total $66 + 25 = 91$ cas favorable sur (6^m ; m étant le nombre de lancer) $6^3 = 216$ cas possibles.



Un cas favorable est un cas où l'on a déjà obtenu un 6 avant le prochain lancer.
Un cas non favorable est un cas où l'on a obtenu quelque chose différent de 6.

• Au 1er lancer, il n'y a qu'un seul cas favorable et 5 cas non favorable.

Pour les cas favorable, on a 6 façon de remplir la condition au 2ème lancer et 1 seul façon pour les cas non favorables.

En deux lancers, il y a $1\times6+5\times1 = 11$ cas favorables et $(6\times6) - 11 = 25$ cas non favorables.

De la même façon avec 3 lancers, on a $6\times11 + 25\times1 = 91$ cas favorable et $(36\times6) - 91 = 125$ cas non-favorable.

Cette copie est distribuée aux élèves.

Raisonnement général :

Pour k lancers : il y a 6^k issues possibles et u_k issues favorables.

Pour $k + 1$ lancers : il y a 6^{k+1} issues possibles et u_{k+1} issues favorables.

Calcul de u_{k+1} :

- Pour chacune des u_k issues favorables aux k premiers lancers, on a obtenu au moins un 6 avant le $(k + 1)^{\text{ème}}$ lancer. Donc les 6 issues possibles du $(k + 1)^{\text{ème}}$ lancer donnent une issue favorable. On a ainsi : $6u_k$ issues favorables.

- Pour chacune des $6^k - u_k$ issues non favorables aux k premiers lancers,, il faut obtenir 6 au $(k + 1)^{\text{ème}}$ lancer pour gagner (une seule issue favorable). On a ainsi $6^k - u_k$ issues favorables.

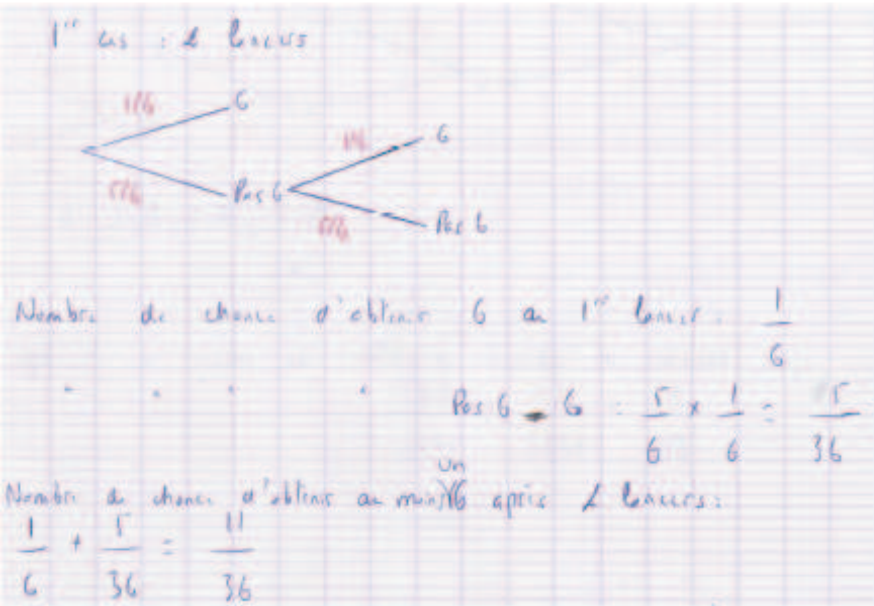
Donc : Pour k entier ≥ 1, on a $u_{k+1} = 6u_k + 6^k - u_k = 5u_k + 6^k$

On reconnaît un algorithme de calcul des cas favorables. Par exemple , on peut écrire un algorithme permettant d'obtenir le nombre d'issues favorables pour 2, 3, 4 lancers ; l'algorithme est écrit en dialogue avec la classe.

```
Variables : U, k
Initialisation : U prend la valeur 1, k prend la valeur 1
   Pour I allant de 1 à 3
         U prend la valeur 5U + 6^k
         k prend la valeur k + 1
         Afficher U, k
   FinPour
```

On fait ensuite fonctionner l'algorithme grâce à un tableau, puis on modifie l'algorithme pour que l'utilisateur puisse saisir le nombre de fois N où on fait la boucle (travail maison).

II. Arbres pondérés.



Copie montrée et distribuée aux élèves.

Situation : on répète l'expérience de lancer un dé cubique équilibré. On s'intéresse aux deux issues :

S : obtenir un six

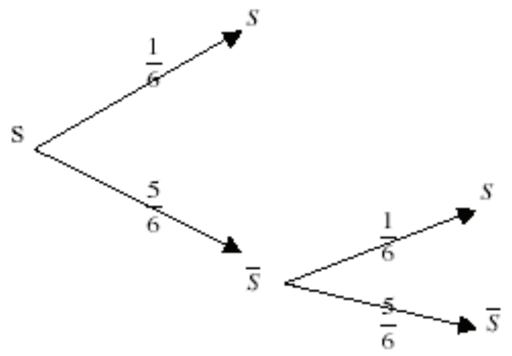
$\overline{S}$: ne pas obtenir 6

Rappel : $\overline{S}$ est l'événement contraire (ou complémentaire) de S.

On a : $p(\overline{S}) = 1 - p(S)$.

Vocabulaire : Une expérience à deux issues (S et $\overline{S}$) s'appelle : une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*, où *p* est la probabilité de l'issue S.

1. Cas de deux lancers.



A_1 : « on obtient 6 au premier lancer »

A_2 : « on obtient non-6 au premier lancer et 6 au deuxième lancer »

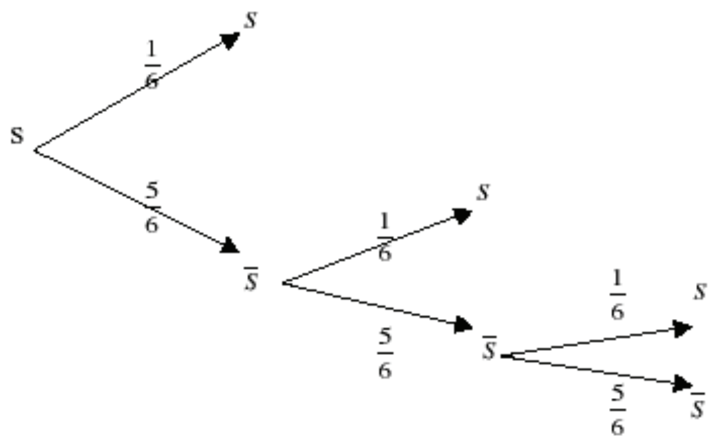
$E_2 = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 incompatibles (ou disjoints) (c'est-à-dire $A_1 \cap A_2 = \emptyset$).

Vocabulaire : on dit que $\{A_1, A_2\}$ forme une partition de E_2.

On a : $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$

Cas général : $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$.

2. Cas de trois lancers.



$p(E_3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{216}$.

3. Cas de quatre lancers : arbre à faire à la maison.

$p(E_4) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} = \frac{671}{1296}$

4. Vocabulaire .

On répète 4 fois le lancer d'un dé cubique équilibré. On s'intéresse au numéro du premier lancer auquel apparaît le 6 pour la première fois.

On note Y ce numéro.

Y s'appelle une variable aléatoire. Y peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4. On convient que Y = 0 lorsque le 6 n'apparaît pas.

Pour k = 0 à 4, « Y = k » est un événement. On a :

$$p(Y=1)=\frac{1}{6}$$
$$p(Y=2)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$$
$$p(Y=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$$
$$p(Y=4)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}$$
$$p(Y=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Vocabulaire : la donnée des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y et des probabilités p(Y=k) s'appelle la loi de probabilité de Y.

Dans le cas ci-dessus, on dit que Y suit une loi géométrique tronquée de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$.

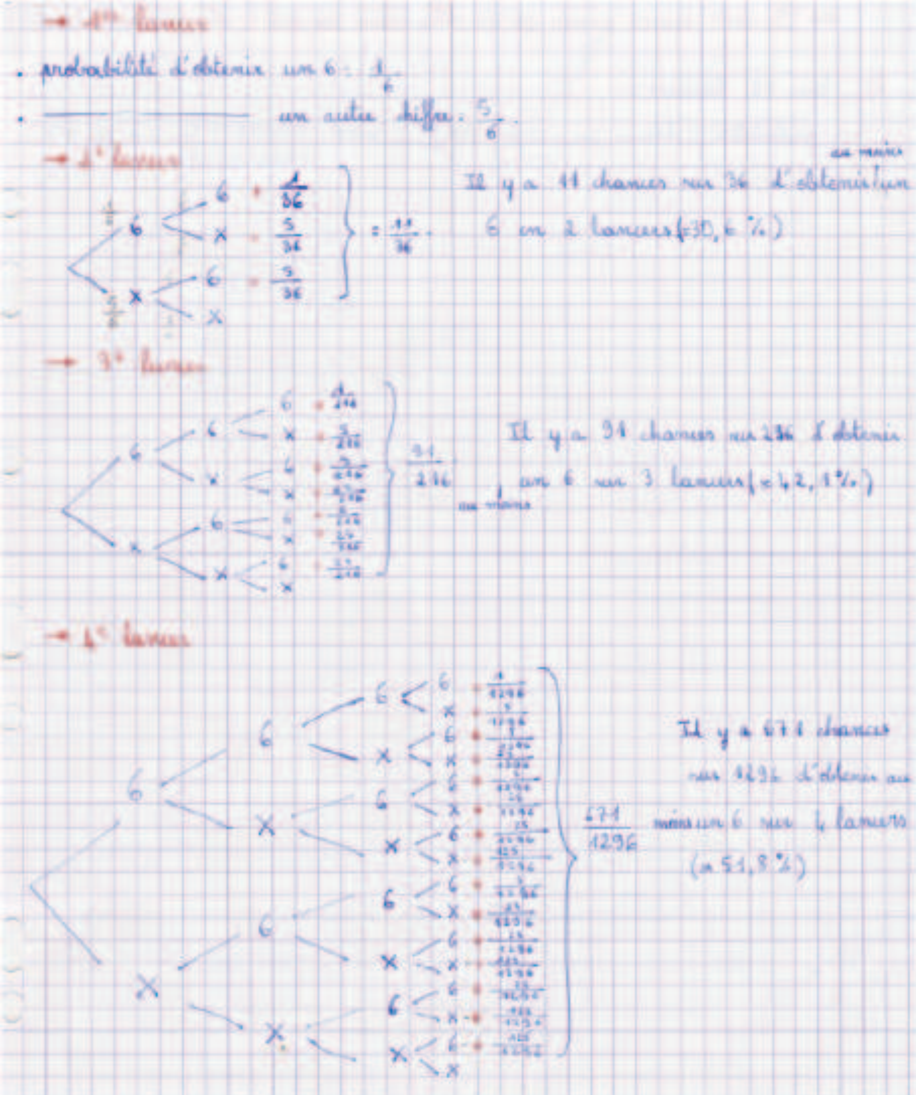
Calcul de $(1+x+x^2+x^3)(1-x)$ pour obtenir l'identité :

Pour $x \neq 1$, $1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$, puis calcul de $\sum_{k=0}^{k=4} p(Y=k)$ et commentaire du résultat.

5. Règles d'utilisation des arbres pondérés.

- Chaque branche est pondérée par sa probabilité.
- A chaque nœud, les différentes branches représentent des issues incompatibles deux à deux et toutes les possibilités sont représentées. Ainsi, à chaque nœud, la somme des probabilités des branches est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.
- La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des chemins favorables à A.

6. Un arbre complet.



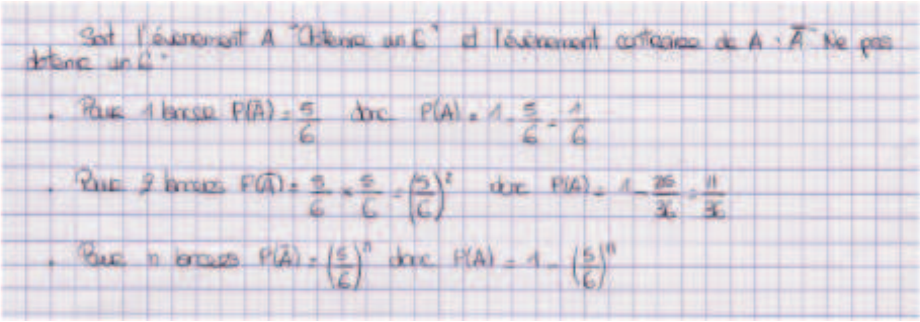
Commentaire sur la copie.

L'arbre complet permet de répondre à la première question supplémentaire (voir plus loin).

Vocabulaire : on répète 4 fois à l'identique une épreuve de Bernoulli. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$.

Toutes ces méthodes nous donnent la réponse au problème posé : il devient avantageux de parier qu'on obtient au moins un six à partir de 4 lancers car $p(E_4) \approx 0{,}518 > \frac{1}{2}$ et $p(E_3) \approx 0{,}421 < \frac{1}{2}$.

7. Evènement complémentaire (ou contraire)



Soit l'événement A "Obtenir un 6" et l'événement contraire de A : $\bar{A}$ "Ne pas obtenir un 6"

- Pour 1 lancer $P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$ donc $P(A) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$
- Pour 2 lancers $P(\bar{A}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$ donc $P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$
- Pour n lancers $P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ donc $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

E_n : « on obtient au moins un 6 en n lancers »

$\overline{E_n}$: « on n'obtient jamais 6 en n lancers »

On peut imaginer l'arbre modélisant le schéma de Bernoulli. Il y a un seul chemin favorable :

$$\underbrace{\bar{S} - \bar{S} - \bar{S} - \ldots - \bar{S}}_{n \text{ lancers}}$$

$$\text{Donc : } \quad p(\overline{E_n}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \text{donc} \quad p(E_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad .$$

Remarque sur l'intérêt de l'événement complémentaire.

Arbre pondéré complet distribué (terminer la pondération).

III. Questions supplémentaires.

J'ai montré la copie suivante, que nous avons commentée et que j'ai distribuée.

Activité préliminaire : Probabilité 26 janvier 2012

1) - On considère un dé équilibré à 6 faces.

- La probabilité d'obtenir l'événement A, « le nombre obtenu est 6 » est de $\frac{1}{6}$.

- La probabilité d'obtenir l'événement B « le nombre obtenu n'est pas 6 » est de $\frac{5}{6}$.

- À chaque lancer, il y a donc $\frac{1}{6}$ de chance d'obtenir l'événement A et $\frac{5}{6}$ de chance d'obtenir l'événement B.

- On trace l'arbre pondéré suivant

Pour le fiancés :

La probabilité d'obtenir aucun 6 est de $\frac{625}{1296}$

La probabilité d'obtenir 1 fois l'événement 6 est de $\frac{500}{1296}$

La probabilité d'obtenir l'événement "6" 2 fois est de $\frac{150}{1296}$

La probabilité d'obtenir l'événement "6" 3 fois est de $\frac{20}{1296}$

La probabilité d'obtenir l'événement "6" 4 fois est de $\frac{1}{1296}$

⇒ Donc pour 2 lancers la probabilité de gagner le pari est de $\frac{1}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$

⇒ Pour 3 lancers la probabilité de gagner le pari est de $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$

⇒ Pour 4 lancers, la probabilité de gagner le pari est de $1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$

1) P(on obtient une fois le numéro 6) = $\frac{625}{1296}$

P(on obtient le numéro 6 2 fois) = $\frac{671}{1296}$

Donc P(on obtient une fois le numéro 6) < P(on obtient le numéro 6 2 fois)

Donc il est plus avantageux de parier qu'on va obtenir 2 fois le numéro 6.

2) À l'issue de 12 lancers, on obtient une suite de 12 événements. On cherche le nombre de chemins pour lesquels on ne trouve qu'une seule fois l'événement A. Or il n'y a que 12 "places" possibles pour l'événement A. On appelle ces combinaisons "chemins favorables" :

A B BBBB ... B
A A BBBB ... B
B B A BBB ... B
B B B A BB ... B

$P=12\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{11}=2\times\left(\frac{5}{6}\right)^{11}=\frac{97656250}{362797056}$

1. Première question supplémentaire.

On lance 4 fois le dé. On répète à l'identique 4 fois l'expérience du lancer d'un dé à 6 faces. On s'intéresse à la sortie du 6. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de « succès » lors des 4 répétitions de l'épreuve de Bernoulli. On cherche $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

Pour « X = 1 » : il y a 4 chemins favorables.

$$\begin{array}{c} A-B-B-B \\ B-A-B-B \\ B-B-A-B \\ B-B-B-A \end{array}$$

Chacun des chemins a une branche pondéré par $\frac{1}{6}$ et 3 branches pondérées par $\frac{5}{6}$. Donc chaque chemin a une probabilité égale à $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Donc : $p(X=1)=\frac{4\times1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{4\times125}{6^4}=\frac{500}{6^4}$