La probabilité d'obtenir l'événement "6" 2 fois est de $\frac{150}{1296}$

La probabilité d'obtenir l'événement "6" 3 fois est de $\frac{20}{1296}$

La probabilité d'obtenir l'événement "6" 4 fois est de $\frac{1}{1296}$

$\Rightarrow$ Donc pour 2 lancers la probabilité de gagner le pari est de $\frac{1}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$

$\Rightarrow$ Pour 3 lancers la probabilité de gagner le pari est de $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$

$\Rightarrow$ Pour 4 lancers, la probabilité de gagner le pari est de $1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$

1) P(on obtient une fois le numéro 6) = $\frac{625}{1296}$

P(on obtient le numéro 6 2 fois) = $\frac{671}{1296}$

Donc P(on obtient une fois le numéro 6) < P(on obtient le numéro 6 2 fois)

Donc il est plus avantageux de parier qu'on va obtenir 2 fois le numéro 6.

2) À l'issue de 12 lancers, on obtient une suite de 12 événements. On cherche le nombre de chemins pour lesquels on ne trouve qu'une seule fois l'événement A. Or il n'y a que 12 "places" possibles pour l'événement A. On appelle ces combinaisons "chemins favorables" :

A B B B B B ... B
B A B B B B ... B
B B A B B B ... B
B B B A B B ... B

$P=12\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{11}=2\times\left(\frac{5}{6}\right)^{11}=\frac{97656250}{362797056}$

1. Première question supplémentaire.

On lance 4 fois le dé. On répète à l'identique 4 fois l'expérience du lancer d'un dé à 6 faces. On s'intéresse à la sortie du 6. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de « succès » lors des 4 répétitions de l'épreuve de Bernoulli. On cherche $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

Pour « X = 1 » : il y a 4 chemins favorables.

$$A-B-B-B$$
$$B-A-B-B$$
$$B-B-A-B$$
$$B-B-B-A$$

Chacun des chemins a une branche pondéré par $\frac{1}{6}$ et 3 branches pondérées par $\frac{5}{6}$. Donc chaque chemin a une probabilité égale à $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Donc : $p(X=1)=\frac{4\times1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{4\times125}{6^4}=\frac{500}{6^4}$

Pour « X = 2 » : il y a 6 chemins favorables.

$$\begin{array}{c} A-A-B-B \\ A-B-A-B \\ A-B-B-A \\ B-A-A-B \\ B-A-B-A \\ B-B-A-A \end{array}$$

Chaque chemin favorable a pour probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Donc : $p(X=2)=6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{150}{6^4}$.

Vocabulaire :

On répète 4 fois de manière identique une épreuve de Bernoulli. On s'intéresse à la variable aléatoire égale au nombre de succès parmi ces quatre répétitions. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n = 4 et p = $\frac{1}{6}$.

X peut prendre les valeurs : {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4}.

Pour k de 0 à 4, on a :

$$p(X=k) = \text{nombre de chemins favorables} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

Le nombre de chemins favorables, c'est-à-dire comportant k succès dans une répétition de 4 épreuves se note : $\binom{4}{k}$ (et se lit : « k parmi 4 »).

On a vu : $\binom{4}{1}=4;\binom{4}{2}=6$ . .

Remarque : $\binom{4}{1}=\binom{4}{3}$ car il y autant de chemins avec 3 succès (A) que de chemins avec 3 « échecs » (B), c'est-à-dire avec 1 succès (A).

On connaît donc parfaitement la loi de X.

$$p(X=0)=1\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^4=\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$p(X=1)=4\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

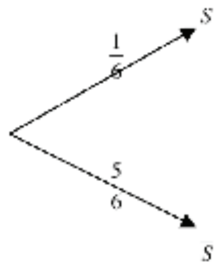
$$p(X=2)=6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$p(X=3)=4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

$$p(X=4)=1\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)^0=\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

2. Deuxième question supplémentaire

On lance 12 fois le dé et on s’intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre de fois où on obtient 6. On reconnaît un schéma de Bernoulli où on répète 12 fois l'épreuve :



X suit la loi binomiale de paramètres n = 12 et $p = \frac{1}{6}$.

$$p(X=1)=\underbrace{\binom{12}{1}}_{\text{nb de chemins favorables}}\times\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{11}}_{\text{probabilité d'un chemin favorable}}$$

Il y a 12 chemins favorables car S peut arriver au premier lancer ou au deuxième lancer ou au troisième lancer, etc.

$$p(X=1)=12\times\frac{5^{11}}{6^{12}}$$

$$p(X=2)=\underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{nb de chemins favorables}}\times\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}_{\text{probabilité d'un chemin favorable}}$$

Calcul du nombre de chemins favorables :

Premier S au premier lancer : $S-\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{11 lancers avec un seul S}}$ 11 chemins de ce type

Premier S au deuxième lancer : $\overline{S}-S-\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{10 lancers avec un seul S}}$ 10 chemins de ce type

Premier S au troisième lancer : $\overline{S}-\overline{S}-S-\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{10 lancers avec un seul S}}$ 9 chemins de ce type

Et ainsi de suite.

Donc : $\binom{12}{2}=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$

$$p(X=2)=\frac{66\times5^{11}}{6^{12}}$$

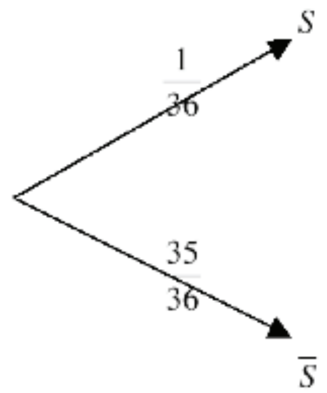
Donc : $p(X = 2) > p(X = 1)$

Il vaut mieux parier que le 6 sortira exactement 2 fois que parier que le 6 sortira exactement 1 fois.

3. Dernière question supplémentaire.

F_{24} : « On obtient au moins un double-six en 24 lancers de deux dés »

On reconnaît un schéma de Bernoulli où on répète de manière identique 24 fois l’épreuve :



$$p(F_{24}) = 1 - p(\overline{F_{24}})$$

Il y a un seul chemin favorable à $\overline{F_{24}}$: $\underbrace{\overline{S} - \overline{S} - \overline{S} - \overline{S} - ...... - \overline{S}}_{24\ \text{lancers}}$

$$p(\overline{F_{24}}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \text{ et } p(F_{24}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}491$$

On avait trouvé : $p(E_4) \approx 0{,}518$.

c. Le détail du planning des séances.

Une première séance de deux heures (jeudi) a permis de faire la synthèse ci-dessus jusqu'au II.6 inclus, avec distribution de l'arbre complet à pondérer. J'ai demandé de faire les questions supplémentaires pour le cours suivant (samedi) sans succès .

La deuxième séance d'une heure (samedi) : nous avons traité le II.7, puis fait collectivement la question supplémentaire 1, puis la synthèse III1.

J'ai demandé de faire les questions supllémentaires 2 et 3 pour le mardi suivant et j'ai donné des exercices du livre (Math'x Didier: 17-16 page 214 et 11 page 213). Troisième séance de deux heures (mardi) : correction des questions supplémentaires 2 et 3 (la classe avait bien travaillé à la maison). Nous avons corrigé l'algorithme à modifier du I., corrigé l'exercice 13 du livre, avec une question supplémentaire sur une répétition d'épreuves.

Distribution du texte de Pascal à lire pour jeudi.

Lettre de Pascal à Fermat (29 juilet 1654)

Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M..., car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous le savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai u l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.

Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans le nombres par cette raison :
Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.
Si on entreprend de faire Sonnez[1] avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.
Et néanmoins, 24 est à 36 (qui est le nombre des faces des deux dés) comme 4 est à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).
Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

Lors de la quatrième séance, nous avons lu la lettre de Pascal, fait le lien avec notre problème de dés, commenté l'erreur du Chevalier de Méré. J'ai montrer un diaporama sur Pascal et Fermat pour situer les personnages dans leur époque et donner quelques éléments sur leur travail scientifique et le contexte.

Nous avons commencé le cours « classique » de première, qui sera terminé la semaine suivante (émaillé bien sûr d'exercices divers).

1Faire « sonnez » signifie « obtenir un double-six ».