

Les mathématiques pour sauver la démocratie

J.-B. AUBIN, INSA-Lyon, ICJ
A. ROLLAND, IUT LUMIERE Lyon II, labo ERIC
S. LEONI, INSA-Lyon, ICJ
I. GANNAZ, INSA-Lyon, ICJ

9 mars 2022 - APMEP

Qui suis-je ?

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Jean-Baptiste AUBIN

- maître de conférence en statistique,
- enseignant-chercheur à l'INSA de Lyon et à l'Institut Camille Jordan (Lyon 1),
- passionné de médiation (lier les math. à la magie, au hasard...).

<http://jeanbaptiste.aubin.free.fr/>

Crise de notre démocratie représentative

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

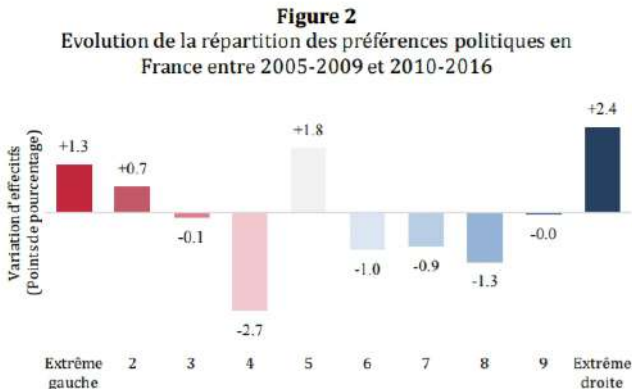
Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting



Défiance envers les politiques...

Le vote contestataire augmente



Source : Eurobaromètres. Lecture : entre les périodes 2005-2009 et 2010-2016, les individus se déclarant au centre du spectre politique (5 sur une échelle de 1 à 10) ont été de 1,8 points de pourcentage plus nombreux.

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation
Les différentes façons de faire...
Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

L'abstention augmente

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Abstention aux législatives

Source : ministère de l'Intérieur. Premier tour. En %



La représentativité en question : la CSP

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

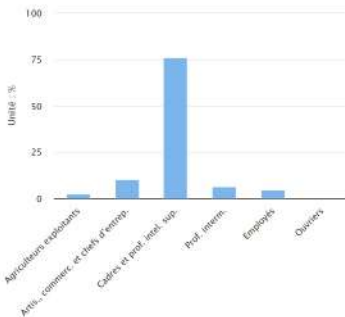
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

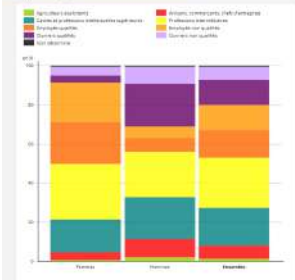
Origine sociale des députés



● CSP des députés 2017

Lecture : 4,6 % des députés sont des employés en 2017. Cette catégorie socioprofessionnelle représente 28,3 % de la population active occupée en 2014.
Source : Institut Tédérot - Données 2017 - © Observatoire des inégalités

Catégorie socioprofessionnelle selon le sexe en 2019



Lecture : en 2019, 21,4 % des femmes en emploi sont employées qualifiées.
Source : France hors Mayotte, population des régions, perspectives en ligne
Source : Insee, enquête Emploi

La représentativité en question : le sexe

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting



% de femmes députées élues dans les Assemblées nationales de la Ve République - Crédits : Camille Renard - Radio France

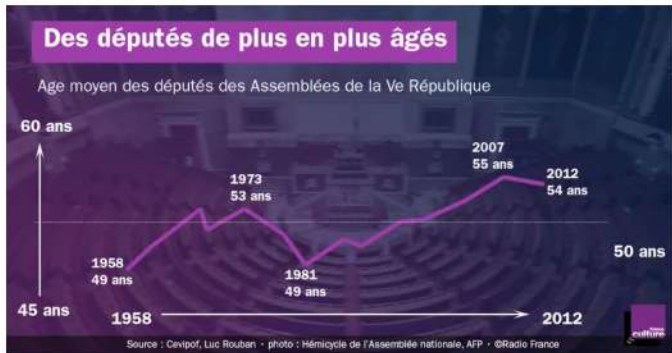
La représentativité en question : l'âge

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation
Les différentes façons de faire...
Propriétés mathématiques du wL² deepest voting



Age moyen des députés de la Ve République • Crédits : Camille Renard - Radio France

et on ne parle pas d'origine ethnique ou de niveau d'étude...

Les causes ? Le calendrier électoral

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting



Les causes ? Les groupes de pression

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL^* deepest voting



Silvano Mello/Cartoon Movement

Les causes ? Notre mode de scrutin

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Le scrutin majoritaire à deux tours :

- incite au "vote stratégique" (vote utile),
- ne conserve que peu d'information sur les ordres de préférences des votants,
- n'élit pas systématiquement le candidat gagnant contre tous les autres en tête-à-tête,
- ne prend pas en compte les votes blancs, etc.

Les causes ? Notre mode de scrutin

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Le scrutin majoritaire à deux tours :

- incite au "vote stratégique" (vote utile),
- ne conserve que peu d'information sur les ordres de préférences des votants,
- n'élit pas systématiquement le candidat gagnant contre tous les autres en tête-à-tête,
- ne prend pas en compte les votes blancs, etc.

Par quoi remplacer notre vieux mode de scrutin ?

C'est parti pour une exploration dans l'espace merveilleux des scrutins uninominaux !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL^p deepest voting



Sommaire

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

- 1 Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence
 - Des exemples
 - Des limites
- 2 Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

- 1 Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence
 - Des exemples
 - Des limites
- 2 Scrutins uninominaux basés sur des évaluations
 - Définition et visualisation
 - Les différentes façons de faire...
 - Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

On suppose qu'on connaît :

- la liste des candidats : $x, y, z...$
- la liste des votants : $a, b, c...$
- les préférences de **tous** les votants sur **l'ensemble** des candidats

On suppose qu'on connaît :

- la liste des candidats : $x, y, z...$
- la liste des votants : $a, b, c...$
- les préférences de **tous** les votants sur **l'ensemble** des candidats

On suppose aussi que :

- les votants sont sincères
- les préférences des votants ne changent pas au cours du scrutin

Formalisme : tableau

Tableau de votants :

	a	b	c	...
1	x	y	y	...
2	y	x	z	...
3	z	z	x	...

Tableau de groupes de votants :

groupe	A	B	C	...
nb votants	3	2	7	...
1	x	y	y	...
2	y	x	z	...
3	z	z	x	...

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Mode de scrutin

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

Un **mode de scrutin M** est une fonction qui prend en argument les préférences individuelles et retourne un vainqueur du scrutin.

$$M : \begin{cases} a : x \succ_a y \succ_a z \\ b : y \succ_b x \succ_b z \\ c : y \succ_c z \succ_c x \\ d : \dots \\ \dots \end{cases} \rightarrow x \text{ ou } y \text{ ou } z$$

Des exemples classiques de mécanismes de vote

- 1 Scrutin majoritaire à un tour
- 2 Scrutin majoritaire à deux tours
- 3 Scrutin de Borda

Scrutin de Borda (1781)

Principe : on donne 3 points à un candidat classé premier, 2 points à un candidats donné deuxième, 1 point à un candidat donné troisième. Le candidat au plus de points est déclaré élu.

- 4 Scrutin de Condorcet

Scrutin de Condorcet (1785)

Principe : on regarde combien de fois x bat y , x bat z , y bat z et on déclare vainqueur *de Condorcet* le candidat qui bat tous les autres *s'il existe*.

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wLⁿ deepest voting

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour :

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wLⁿ deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours :

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda :

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda : y est élu

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda : y est élu
- Scrutin de Condorcet :

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Mais qui donc va être élu ?

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda : y est élu
- Scrutin de Condorcet : z est élu

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

Le choix du mode de scrutin est tout sauf anodin...

- pour déterminer le vainqueur,
- pour la stratégie des candidats.

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

- 1 Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence
 - Des exemples
 - Des limites
- 2 Scrutins uninominaux basés sur des évaluations
 - Définition et visualisation
 - Les différentes façons de faire...
 - Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

Par quoi remplacer notre vieux mode de scrutin ?

La démarche

Essayons de déterminer quelles propriétés minimales on peut attendre d'un **bon** mode de scrutin.

Propriétés souhaitables (minimales) :

- **Universalité** : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*.

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Par quoi remplacer notre vieux mode de scrutin ?

La démarche

Essayons de déterminer quelles propriétés minimales on peut attendre d'un **bon** mode de scrutin.

Propriétés souhaitables (minimales) :

- **Universalité** : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*.
- **Unanimité** : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$.

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Par quoi remplacer notre vieux mode de scrutin ?

La démarche

Essayons de déterminer quelles propriétés minimales on peut attendre d'un **bon** mode de scrutin.

Propriétés souhaitables (minimales) :

- **Universalité** : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*.
- **Unanimité** : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$.
- **Non dictature** : ce n'est pas un votant qui décide pour tout le monde.

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL² deepest voting

Par quoi remplacer notre vieux mode de scrutin ?

La démarche

Essayons de déterminer quelles propriétés minimales on peut attendre d'un **bon** mode de scrutin.

Propriétés souhaitables (minimales) :

- **Universalité** : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*.
- **Unanimité** : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$.
- **Non dictature** : ce n'est pas un votant qui décide pour tout le monde.
- **Indépendance vis-à-vis des alternatives tierces** : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z .

Théorème d'Arrow

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Théorème d'Arrow (1951)

Il n'existe pas de procédure d'agrégation d'ordres de préférences vérifiant simultanément les propriétés précédentes.

Autrement dit : un **bon** scrutin "démocratique" ne peut pas exister !

Tout espoir est-il donc perdu ? Oui, dans ce cadre...

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting



Edvard Munch, *Le cri*, 1893

Tout espoir est-il donc perdu ? NON !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Théorème d'Arrow (1951)

Il n'existe pas de procédure d'agrégation ***d'ordres de préférences*** vérifiant simultanément les propriétés précédentes.

Il faut dépasser le cadre des ordres de préférences !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

- 1 Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence
- 2 Scrutins uninominaux basés sur des évaluations
 - Définition et visualisation
 - Les différentes façons de faire...
 - Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

- 1 Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence
 - Des exemples
 - Des limites
- 2 Scrutins uninominaux basés sur des évaluations
 - Définition et visualisation
 - Les différentes façons de faire...
 - Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

L'idée géniale : Noter les candidats

On ne choisit plus un candidat, mais **on leur donne à tous une appréciation ou une note.**



Marie-Claude Pietragalla, Jean-Marc Généreux, Slay'In et Chris Marques sur le plateau de Danse avec les stars (© TF1)

Premier effet : plus d'information, plus de nuances !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

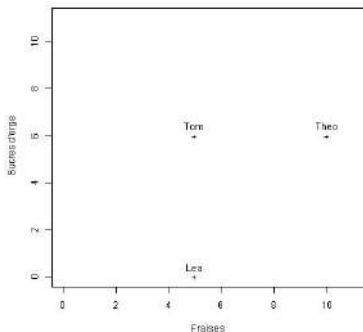
Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

Comment visualiser ces notes ?

Sur un exemple simple :

	Fraises	Sucres d'orges
Léa	5	0
Tom	5	6
Théo	10	6



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

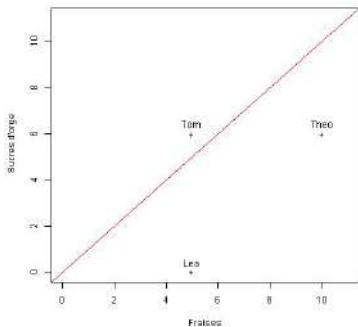
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

Problème : Comment choisit-on le vainqueur ?



Le **scrutin majoritaire à un tour** consiste à couper le nuage de point en deux et à compter.

Comment prendre en compte toute l'information des notes attribuées ?

La droite rouge sépare ceux qui préfèrent les fraises des supporters des sucres d'orge.

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

L'idée du "deepest voting"



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

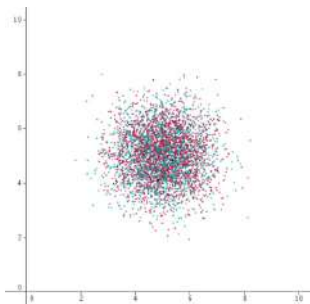
Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Le scrutin suit la préférence du votant (possiblement virtuel) le plus au "centre" du nuage, le plus "profond".

Les problèmes arrivent...

C'est quoi le "centre" d'un nuage de points ???



→ Il en existe plusieurs définitions !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL^p deepest voting

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

- 1 Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence
 - Des exemples
 - Des limites
- 2 Scrutins uninominaux basés sur des évaluations
 - Définition et visualisation
 - Les différentes façons de faire...
 - Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

1 : la moyenne candidat par candidat

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Centre = point qui a pour coordonnées les moyennes des notes obtenues candidat par candidat (c'est le centre de gravité des points du nuage).

Est élu le candidat dont la moyenne des notes est la plus élevée (c'est le "range voting").

Exemple :

- Moyenne de $\frac{5+5+10}{3} = 6,67$ pour les fraises et
- Moyenne de $\frac{0+6+6}{3} = 4$ pour les sucres d'orge.

Les fraises sont élues.

Un cas particulier, le vote par approbation

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Si l'échelle des votes possibles est seulement 0 (inacceptable) et 1 (acceptable) et que l'on élit le candidat avec la meilleure moyenne, alors c'est le vote par approbation !

- Très facile à mettre en place : le votant peut juste voter pour autant de candidats qu'il le souhaite.
- Très bons résultats en terme de satisfaction pour les votants.

Un petit problème...

Si un votant n'est pas honnête, il pourrait avantager artificiellement son candidat préféré :



Pour son candidat préféré



Pour les autres

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

2 : la médiane candidat par candidat

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Centre = point qui a pour coordonnées les médianes des notes obtenues candidat par candidat.

Est élu le candidat dont la médiane des notes est la plus élevée (c'est le jugement majoritaire).

Rappel : la médiane d'une série de notes ordonnées est la note "du milieu" (il y a autant de notes inférieures à la médiane que de supérieures).

2 : la médiane candidat par candidat

Problème, notre exemple initial donne :

	Fraise	Sucre d'orge
Léa	5	0
Tom	5	6
Théo	10	6

- les fraises ont une médiane de 5 et
- les sucres d'orge ont une médiane de 6.

Les sucres d'orge sont élus alors que deux des trois votants les aiment bien moins que les fraises et que le troisième est presque indécis !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Un cas plus général

Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

	Fraise	Sucre d'orge
Léa 1	5	0
Léa 2	5	0
⋮	⋮	⋮
Léa 1 000	5	0
Tom	5	6
Théo 1	10	6
Théo 2	10	6
⋮	⋮	⋮
Théo 1 000	10	6

S'il y avait mille votants comme Léa et mille votants comme Théo, le résultat du vote donnerait toujours les sucres d'orge vainqueurs alors que toute la population (sauf un) préfèrerait largement les fraises !

Faisons le point !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wLⁿ deepest voting

Passer du *vote* aux *notes* semble un progrès mais...

- comparer les moyennes des candidats est peu robuste,
- comparer les médianes des candidats amène des paradoxes.

3 : le centre du “Convex Hull Peeling”

L'une des définitions est issue du “**Convex Hull Peeling**” de Barnett qui consiste à éliminer tous les points “sur le bord” du nuage...et à recommencer jusqu'à ce qu'il ne reste plus !



Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence

Des exemples

Des limites

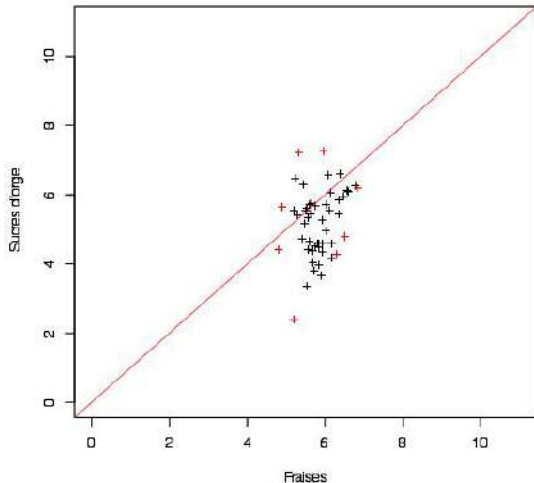
Scrutins uninominaux basés sur des évaluations

Définition et visualisation

Les différentes façons de faire...

Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

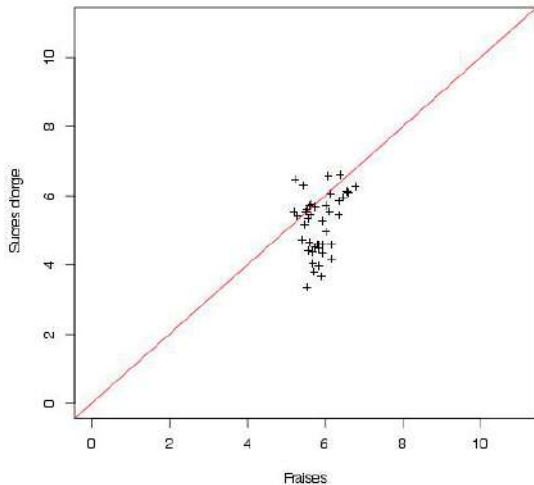
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

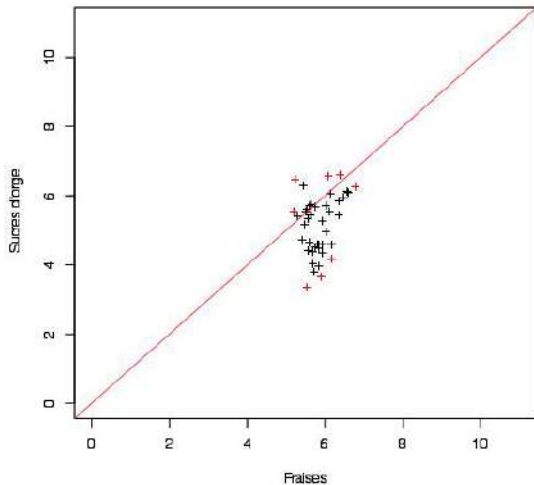
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

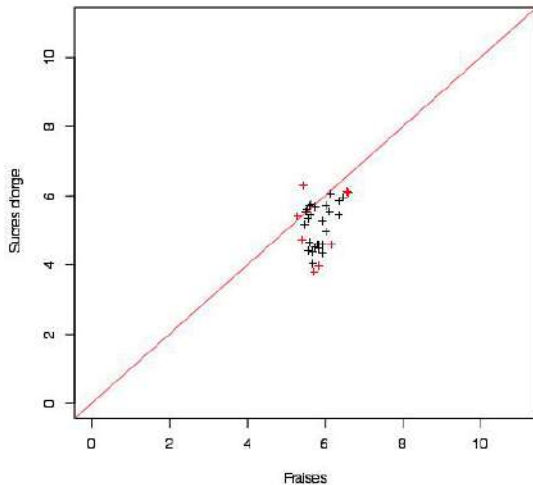
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

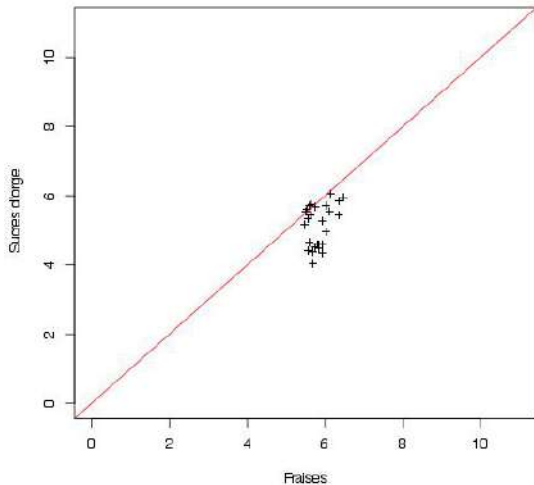
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

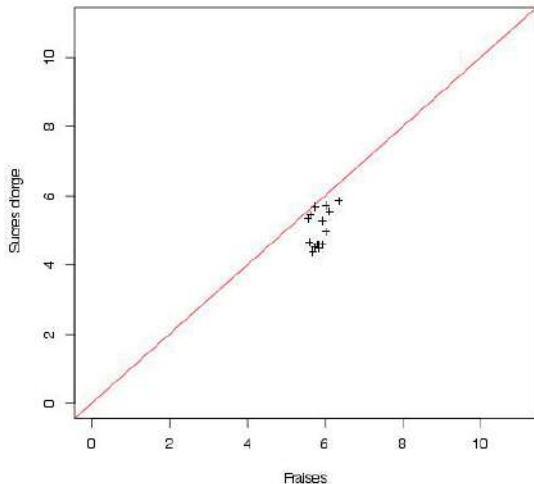
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

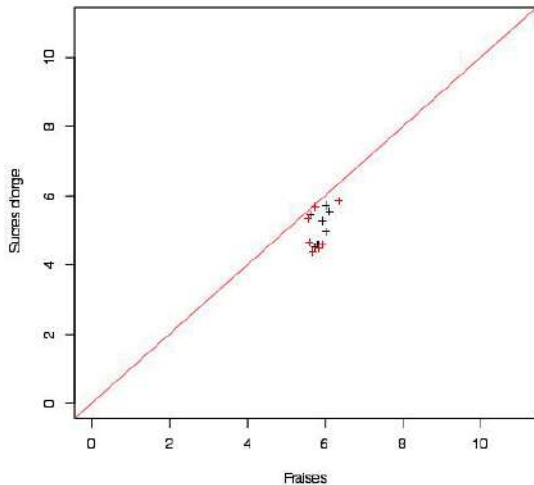
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

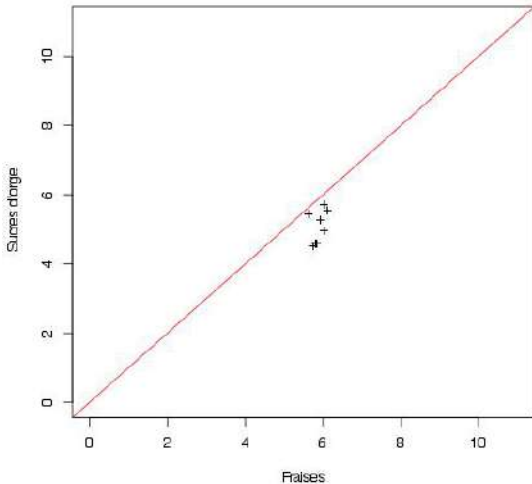
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

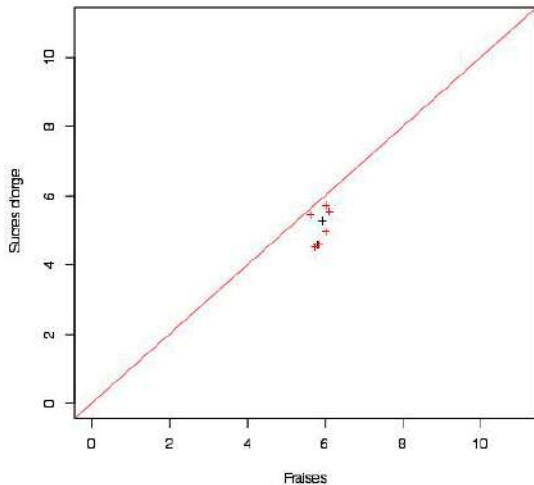
Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting



le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

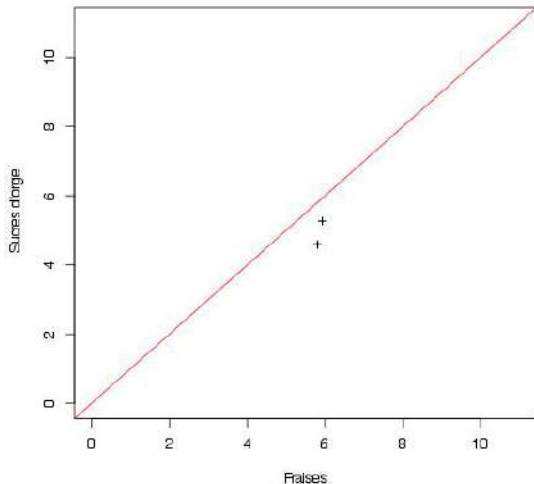
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

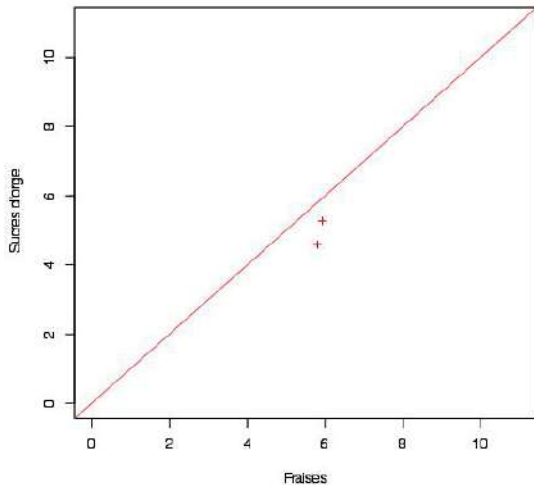
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

le “Convex Hull Peeling”



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

D'autres définitions de centres sont-elles possibles ?

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Oui ! Il existe de très nombreuses définitions de centres !

Chaque nouvelle définition de centre donne un nouveau mode de scrutin disponible pour la société !

Pour aller plus loin : chercher **fonction de profondeur** (ou "**depth function**"), outil très efficace pour trouver les centres des nuages de points !

4 Le centre des profondeurs wL^p

Centre des profondeurs wL^p = point qui minimise la somme de ses distances à tous les points du nuage.



Mais, comme on peut considérer une distance différente pour chaque réel $p \geq 1$, ça en fait...une infinité !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

Une infinité de modes de scrutins !

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting



Comme le soleil n'est pas la seule étoile, le scrutin majoritaire à 2 tours n'est pas le seul mode de scrutin !

Un jeu de 10 votants pour visualiser tout ça...

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

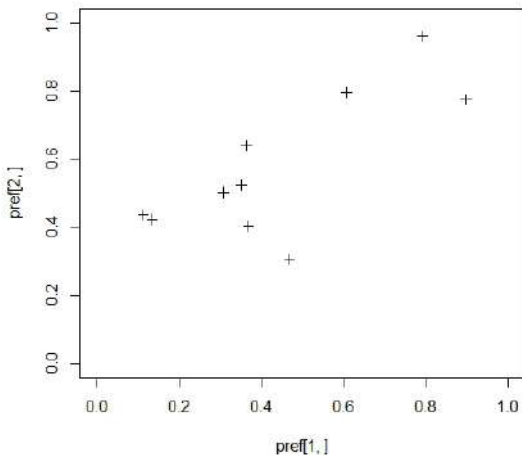
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting



"Weighted L^1 depth" de Zuo

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

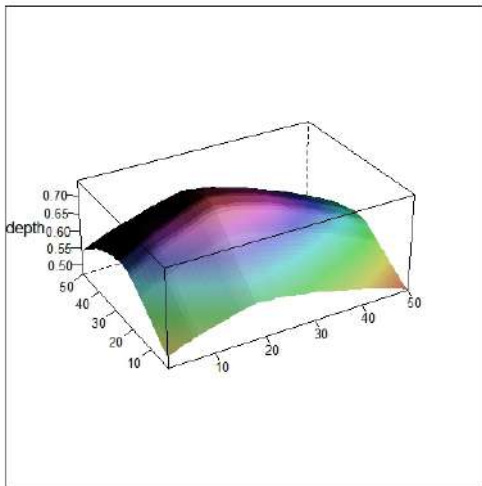
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^1 deepest voting

wL1 depth



"Weighted L^2 depth" de Zuo

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

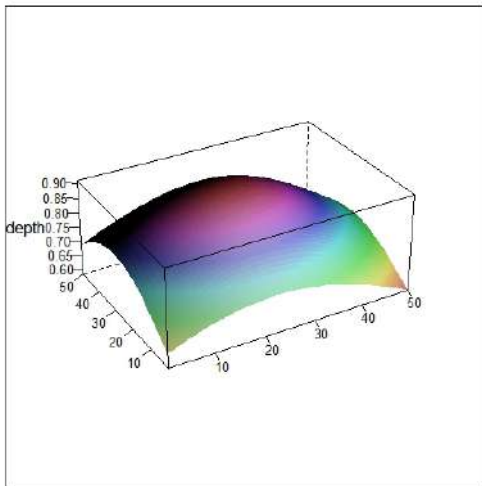
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^2 deepest voting

wL2 depth



"Weighted L^3 depth" de Zuo

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

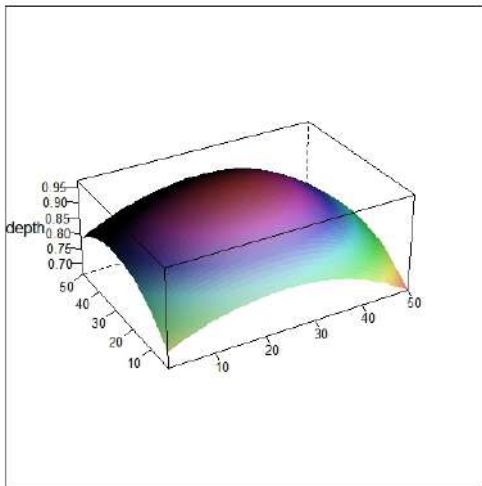
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^3 deepest voting

wL3 depth



"Weighted L^4 depth" de Zuo

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

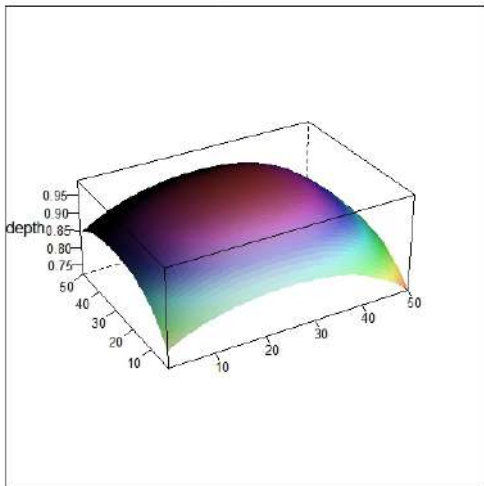
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^4 deepest voting

wL4 depth



"Weighted L^5 depth" de Zuo

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

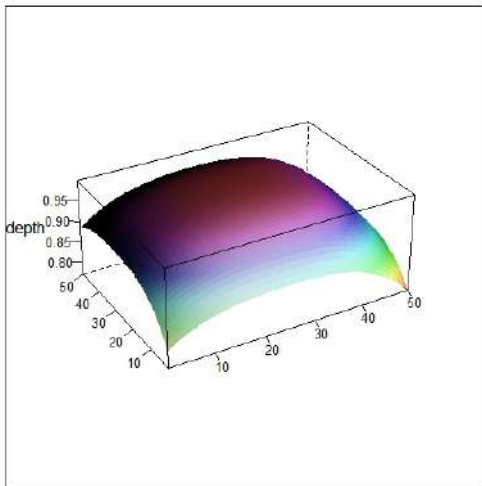
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^5 deepest voting

wL5 depth



"Weighted L^{10} depth" de Zuo

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

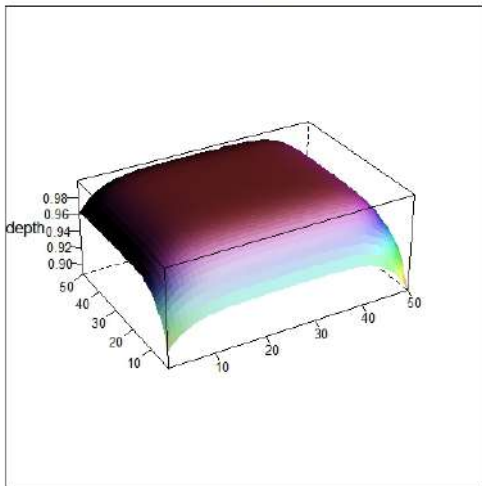
Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

wL10 depth



Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

- 1 Scrutins uninominaux basés sur des ordres de préférence
 - Des exemples
 - Des limites
- 2 Scrutins uninominaux basés sur des évaluations
 - Définition et visualisation
 - Les différentes façons de faire...
 - Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting

Le wL^p deepest voting est général

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting

Propriété 1

- **Si $p=1$** , le wL^p Deepest voting est confondu avec le jugement majoritaire,
- **Si $p=2$** , le wL^p Deepest voting est confondu avec le "range voting" (et le vote par approbation),

Le wL^P deepest voting vainc le théorème d'impossibilité d'Arrow !

Propriété 2

Le wL^P Deepest voting vérifie les conditions suivantes :

- **Universalité** : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- **Unanimité** : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- **Indépendance vis-à-vis des alternatives tierces** : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z
- **Non dictature** : ce n'est pas un votant qui décide pour tout le monde

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^P deepest voting

Conclusion...à sens unique !

Les "deepest voting"...

- généralisent les principaux modes de scrutin par évaluation (Judgement Majoritaire, Range Voting, Vote par Approb.),
- tirent profit d'une information plus nuancée et plus large sur les préférences des votants,
- ne sont plus sensibles au théorème d'impossibilité d'Arrow,
- sont moins sensibles à de nombreux autres "paradoxes",
- élisent des candidats mieux aimés, plus consensuels,
- nous donnent un moyen de refuser tous les candidats (si leurs notes sont trop faibles).

Une question ? Une remarque ?

Mon adresse mail : jean-baptiste.aubin@insa-lyon.fr

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples
Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
wL² deepest voting

Bibliographie

- J.-B. Aubin, A. Rolland, Comment être élu à tous les coups, edp sciences, 2022
- Y. Zuo, R. Serfling, General notions on statistical depth function, Ann. Stat., Volume 28, Number 2, 2000
- D. Felsenthal, M. Machover, Electoral systems, Springer, 2012
- K. Arrow, Social choice and Individual values, New-york, Wiley, 1951

Une question ? Une remarque ?

Mon adresse mail : jean-baptiste.aubin@insa-lyon.fr

Scrutins
uninominaux
basés sur des
ordres de
préférence

Des exemples

Des limites

Scrutins
uninominaux
basés sur des
évaluations

Définition et
visualisation

Les différentes façons
de faire...

Propriétés
mathématiques du
 wL^p deepest voting