Baccalauréat mathématiques élémentaires
Athènes, Espagne, Israël juin 1963

EXERCICE 1

Déterminer les fonctions y de la variable x, une fois dérivables, qui vérifient l'équation

$$y' + 2y = 0,$$

y' désignant la fonction dérivée de la fonction y.

EXERCICE 2

Le plan de la figure est rapporté à un repère orthonormé, $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$; l'unité de longueur est le centimètre. Soit $\mathscr{I}$ l'inversion de pôle O et de puissance 9.

1. L'énoncé notera (P) tout cercle qui coupe $x'\mathrm{O}x$ en deux points, M et M$'$, qui soient inverses dans $\mathscr{I}$.
   Montrer que tout cercle (Γ) est orthogonal à un cercle fixe, (O).
   Un point quelconque du plan est-il le centre d'un cercle (Γ) ? Discuter.
   Un cercle étant représenté par son équation,

   $$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + p = 0,$$

   quelles conditions doivent vérifier les coefficients pour qu'il soit un cercle (Γ) ?
   On appelle $\mathscr{S}$ l'ensemble des cercles (Γ) ; la suite du problème a pour objet l'étude de certains ensembles de $\mathscr{S}$.
2. Soit (Γ_1) de centre γ_1 tout cercle (Γ) dont le centre appartient à une droite fixe, (D_1) non perpendiculaire à $x'\mathrm{O}x$.
   Montrer que le cercle (Γ_1) appartient à un faisceau linéaire $\mathscr{F}$, de cercles.
   Discuter la nature du faisceau $\mathscr{F}$ suivant la position de la droite (D_1) par rapport au cercle (O). Déterminer les points limites, ou les points de base, du faisceau $\mathscr{F}$.
   Inversement, tout cercle du faisceau $\mathscr{F}$ est-il un cercle (Γ_1) ? En déduire l'ensemble des points γ_1.
3. Soit (Γ_2), de centre γ_2 tout cercle (Γ) tangent à une droite fixe, (D_2), d'équation $y = 1$.
   Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathscr{I}$, que le cercle (Γ_2) est aussi tangent à un cercle fixe, (C_2), dont on précisera le centre et le rayon.
   Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant α, β, p pour qu'il soit un cercle (Γ_2). En déduire l'ensemble des points γ_2.
4. Soit (Γ_3), de centre γ_3, tout cercle (Γ) tangent à un cercle fixe (C_3), de rayon 1, dont le centre a pour coordonnées $(0~;~+2)$.
   Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathscr{I}$, que le cercle (Γ_3) est aussi tangent à un cercle fixe, $\left(C_3'\right)$, dont on précisera le centre et le rayon.
   Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant α, β, p pour qu'il soit un cercle (Γ_3).
   En déduire l'ensemble des points γ_3. On pourra faire une translation du repère, portant l'origine au point de coordonnées $(0~;~+4)$.

N. B. - Après la question 1, les questions 2, 3, 4 peuvent être traitées dans un ordre arbitraire.
Les figures seront faites avec soin ; l'unité de longueur est imposée : le centimètre.