CONCOURS AVENIR - 25 avril 2021

DURÉE : 1 h 30 min

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.
Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.
Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point**.

GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

1. Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{T}$ trois plans de l'espace, deux à deux non parallèles. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec le plan $\mathscr{R}$.
On peut alors affirmer que la droite $\mathscr{D}$ est :

a. forcément sécante au plan $\mathscr{T}$
b. forcément parallèle au plan $\mathscr{T}$
c. forcément incluse dans $\mathscr{T}$
d. éventuellement parallèle au plan $\mathscr{T}$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A$(1\,;\,-1)$, B$(4\,;\,-4)$ et C$(2021\,;\,-2021)$.
Combien existe-t-il de cercle(s) passant(s) par ces trois points ?

a. Aucun
b. Un unique
c. Deux exactement
d. Une infinité

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $x^2 + y2 - 2x + 4y - 11 = 0$ est un cercle de centre le point de coordonnées :

a. $(1\,;\,-2)$
b. $(-1\,;\,2)$
c. $(-2\,;\,1)$
d. $(2\,;\,-1)$

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $x^4 - y^4$ est constitué :

a. d'une droite et d'un cercle
b. de deux droites et d'un cercle
c. de deux droites
d. de deux droites et d'un point n'appartenant pas à celles-ci

5. Soient A et B deux points distincts du plan muni d'un repère orthonormé. L'ensemble des points M tels que $\text{A}M^2 - \text{AB}^2 = 0$ est :

a. la médiatrice du segment [AB]
b. le cercle de centre A et de rayon AB
c. le cercle de centre B et de rayon AB
d. le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{\text{AR}}$

6. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ dont une équation paramétrique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2t-1\\ y &=& -4+2t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan de base $x\text{O}z$ au point de coordonnées :

a. $(3\,;0\,;3)$
b. $(-3\,;\,-6\,;\,0)$
c. $\left(0\,;\,-3\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$
d. $(0\,;2\,;0)$

7. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 3 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation réduite $y = ax$.
À quel intervalle doit appartenir le nombre réel a pour que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ aient au moins un point en commun ?

a. $\left[-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right]$ **c.** $\left[0\ ;\ \sqrt{2}\right]$
b. $\left[0\ ;\ \sqrt{3}\right]$ **d.** $\left[-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\right]$

CALCUL NUMÉRIQUE, SUITES NUMÉRIQUES

8. Combien existe-t-il de nombre(s) réel(s) égaux à leurs inverses ?

a. Aucun **c.** Exactement deux
b. Un unique **d.** Une infinité

9. Quels que soient les réels a, b et c, on a : $(a+b)^2 - (a+c)^2 =$

a. $(b-c)(2a+b+c)$ **a.** $(b-c)(a+b+2c)$
b. $(b-c)(a+2b+c)$ **d.** (a - c)(a + 2b + c)

10. Soient $a = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ et $b = \sqrt{7}$. On peut alors affirmer que :

a. $a < b$ **c.** $a = b$
b. $a > b$ les nombres a et b ne peuvent pas être comparés

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut affirmer que la somme des n premiers entiers pairs non nuls $2+4+\ldots+2n$ est égale à :

a. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ **c.** $\dfrac{n(2n+1)}{2}$
b. $\dfrac{2n(n+1)}{2}$ **d.** $\dfrac{2n(2n+1)}{2}$

Pour les deux questions suivantes, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & (-1)^n - u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad v_n = (-1)^n u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

12. La suite (v_n) est :

a. arithmétique de raison -1 **c.** géométrique de raison -1
b. géométrique de raison 1 **d.** ni arithmétique, ni géométrique

13. Pour tout entier naturel n, on a :

a. $u_n = n(-1)^n + n$
b. $u_n = n(-1)^n + n(-1)^n$
c. $u_n = (-1)^n - n(-1)^n$
d. $1 - n^2$

14. Soient (u_n) et (v_n) des suites adjacentes, qui convergent vers le réel $\ell \neq 0$. Les suites (a_n) et (b_n), définies par

$$a_n = u_n - \ell \qquad \text{et} \qquad b_n = v_n - \ell$$

sont :

a. adjacentes et convergent vers 0
b. adjacentes et convergent vers ℓ
c. adjacentes et convergent vers $-\ell$
d. non adjacentes

15. Soit (u_n) une suite monotone. Les suites (u_n) et $(-u_n)$:

a. sont forcément adjacentes
b. ne peuvent pas être adjacentes
c. sont adjacentes uniquement si (u_n) converge
d. sont adjacentes uniquement si (u_n) converge vers 0

16. Deux suites constantes sont adjacentes si et seulement si elles sont :

a. nulles
b. convergentes
c. égales
d. convergentes vers 0

17. Soient (u_n) et (v_n) des suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
Soit (w_n) une suite croissante qui converge vers un réel ℓ.
On peut alors affirmer que les suites $(u_n + w_n)$ et $(v_n - w_n)$:

a. sont forcément adjacentes
b. ne peuvent pas être adjacentes
c. sont adjacentes uniquement si $\ell = 0$
d. aucune de ces réponses n'est correcte

18. Soient (u_n) et (v_n) deux suites non nulles, respectivement arithmétique de raison r et géométrique de raison q. Sachant que la suite $(u_n \times v_n)$ est géométrique, on peut affirmer que :

a. $r = 0$ et $q = 1$ **b.** $r = 0$ **c.** $q = 1$ **d.** $r = 0$ ou $q = 1$

FONCTIONS

19. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = 1 + x + \ + \ldots + x^n$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation :

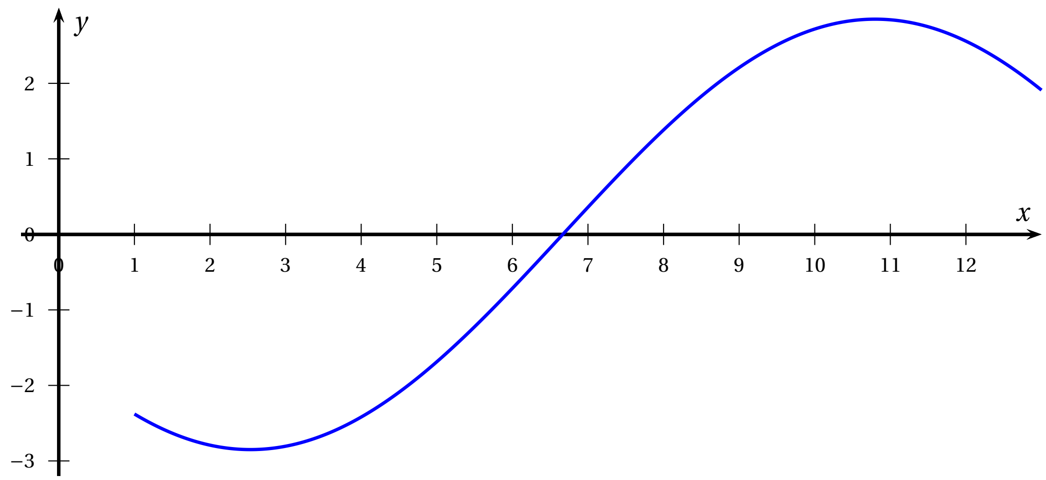
a. $y = \dfrac{n(n+1)}{2}x + \dfrac{n-n^2}{2}$

b. $y = \dfrac{n(n+1)}{2}x + \dfrac{n+2-n^2}{2}$

c. $y = \dfrac{n(n+1)}{2}x + \dfrac{n-n^2}{2}$

d. $y = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}x + \dfrac{n+2-n^2}{2}$

20. On donne ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,13]$:



Combien l'équation $f'(x) = 0$ possède-t-elle de solution(s) dans l'intervalle $[1\,;\,13]$?

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

21. On admet que, pour tout nombre réel x, on a :

$$\mathrm{e}^x \geqslant x+1$$

On peut alors affirmer que pour tout nombre réel x, on a :

a. $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant (x-1)(x+1)$

b. $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant -x^2+1$

c. $\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant x^2-1$

d. $\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant (1-x)(1+x)$

22. Pour tout réel x, on a : $\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) =$

a. e^x

b. e^{2x}

c. x

d. $2x$

23. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^x}$$

On a alors $f'(x) =$

a. $\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^x}$

b. $(x+1)\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^x}$

c. $(x+1)\mathrm{e}^{(x+1)\mathrm{e}^x}$

d. $(x+1)\mathrm{e}^{x(\mathrm{e}^x+1)}$

24. Sachant que $a > 0$ et que la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)$$

est telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 8$, on peut affirmer que :

a. $a = 1$
b. $a = 2$
c. $a = 4$
d. $a = 8$

25. Le domaine de définition de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2\right)$$

est égal à :

a. $\mathbb{R}^*$
b. $\mathbb{R}$
c. $]0\,;\,+\infty$
d. $[0\,;\,+\infty[$

26. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f'(0) = 0$.
Sachant que f est concave, on peut affirmer que f est :

a. à valeurs positives ou nulles sur $[0\,;\,+\infty[$
b. à valeurs négatives ou nulles sur $[0\,;\,+\infty[$
c. croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
d. décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$

27. Quel est l'antécédent par la fonction exponentielle de l'antécédent par la fonction logarithme népérien de 0 ?

a. 0
b. 1
c. e
d. Celui-ci n'existe pas parce que la fonction ln n'est pas définie

28. La somme $S = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{4}{5}}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{6}{7}}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{7}{8}}\right)$ est égale à :

a. $\dfrac{1}{2}\ln(2)$
b. $-\dfrac{1}{2}\ln(2)$
c. $-\dfrac{3}{2}\ln(2)$
d. $\dfrac{3}{2}\ln(2)$

29. Soit sh la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $sh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et α une solution de l'équation $\ln\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) = 1$.
On peut alors affirmer que :

a. $\ln(sh(\alpha) < 0$
b. $\ln(sh(\alpha) > 0$
c. $\ln(sh(\alpha) = 0$
d. Aucune de ces réponses n'est correcte

30. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé en son point d'inflexion a pour équation :

a. $y = -\mathrm{e}^{-2}x - 2\mathrm{e}^{-2}$
b. $y = -3\mathrm{e}^{-4}x - 8\mathrm{e}^{-4}$
c. $y = 3\mathrm{e}^{2}x - 2\mathrm{e}^{2}$
d. $y = 5\mathrm{e}^{-2}x - 8\mathrm{e}^{2}$

31. La fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2[2\ln(x) - 3]$$

est

a. concave sur $]0;\,1[$, convexe sur $]1\,;\,+\infty[$
b. convexe sur $[0;\,1[$, concave sur $]1\,;\,+\infty[$
b. concave sur $]0;\,1[$, convexe sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$
d. convexe sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, concave sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$

32. On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

a. 0
b. 1
c. $-\infty$
d. $+\infty$

33. Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$$

Sachant de plus que v est impaire, on peut affirmer que la fonction $f = v \circ u$, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = v[u(x)]$ est telle que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

a. 0
b. $+\infty$
c. $-\infty$
d. Aucune de ces réponses n'est correcte

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

34. Soit f la fonction définie sur par $f(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2x+5} - 2$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 a pour expression $F(x) =$

a. $\frac{1}{6}e^{2x+5}-2x+6-\frac{1}{6}e^{11}$
b. $\frac{1}{6}e^{2x+5}-\frac{1}{6}e^{5}+3$
c. $\frac{1}{6}e^{2x+5}-2x$
d. Aucune de ces réponses n'est correcte

35. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=2f'(0)$. On peut alors affirmer que, pour tout réel x, $f(x)=$

a. e^{x}
b. e^{2x}
c. $e^{\frac{x}{2}}$
d. 0

36. Si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x)+3y(x)=0$, alors la fonction $g=2f$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

a. $y'(x)+3y(x)=0$
b. $2y'(x)+3y(x)=0$
c. $y'(x)+6y(x)=0$
d. Aucune de ces réponses n'est correcte

37. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y'(x)-y(x)=f(x)$, où f est elle-même une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,solution de l'équation différentielle $y'(x)+3y(x)=0$.
On peut alors affirmer que la fonction g' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

a. $y'(x)-y(x)=0$
b. $y'(x)-y(x)=f(x)$
c. $y'(x)-y(x)=-3f(x)$
d. $y'(x)-y(x)=-2f(x)$

DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS

38. Sachant que $\binom{n}{2}=15$, on peut affirmer que n est :

a. impair
b. multiple de 6
c. un nombre premier
d. multiple de 5

39. Soient A et B deux évènements indépendants tels que $P(B)=\frac{1}{2}P\left(\overline{A}\right)$ et $P(A\cup B)=0,68$. On a alors $P(A)=$

a. $0,6$
b. $0,06$
c. $0,36$
d. $0,46$

40. On lance huit fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
La probabilité d'obtenir exactement 7 « Pile »est égale à :

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{2^3}$ **c.** $\frac{1}{2^5}$ **d.** $\frac{1}{2^8}$

On a alors : E(M) = a.ZI;i).

41. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires telles que :

X suit la loi binomiale de paramètres n et $0,1$;
Y suit la loi binomiale de paramètres n^2 et $0,1$.

Quelle est la valeur de n sachant que $E(X+Y) = 2$?

a. 1 **b.** **c.** 3 **d.** 4

42. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_5$, cinq variables aléatoires telles que pour tout i entier tel que $1 \leqslant i \leqslant 5$, la variable aléatoire X_i suit la suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(8\,;\,\dfrac{1}{2^i}\right)$.
On définit également la variable aléatoire M par :

$$M = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i = \frac{1}{5}\left(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5\right)$$

On a alors $E(M)$:

a. $\dfrac{21}{20}$ **b.** $\dfrac{21}{40}$ **c.** $\dfrac{31}{40}$ **d.** $\dfrac{31}{20}$

43. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B})(n\,;\,p)$ de paramètres n et p, avec $p \in]0\,;\,1[$.
On peut alors affirmer que :

a. $E(X) = pV(X)$
b. $V(X) = pE(X)$
c. $E(X) = (1-p)V(X)$
d. $V(X) = (1-p)E(X)$

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Pour les questions 44 à 45, on considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : SUJET ZÉRO

```
Variables
    S nombre réel
    N, I : entiers naturels non nuls
Traitement
    Saisir N
    I ← 1
    S ← 0
    Tant que I ⩽ N faire
        S ← S + 1/I
        I ← I + 1
    Afficher S
```

44. Pour une valeur saisie de N par l'utilisateur, que retourne cet algorithme ?

a. La somme des entiers de 1 à N

b. La somme des inverses des entiers de 1 à N

c. L'inverse de la somme des entiers de 1 à N

d. L'inverse de la somme des inverses des entiers de 1 à N

45. Pour une valeur saisie de N égale à 5, l'algorithme retourne une valeur comprise entre :

a. 0 et 1

b. 1 et 2

c. 2 et 3

d. 3 et 4

FIN