Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale)

Corrigé du sujet du jour 1

Voie générale – Nouvelle-Calédonie – 19 novembre 2026

A. P. M. E. P.

Exercice 1 — 5 points

1. a. Coordonnées du milieu I de [AB] :

$$\text{I} : \left(\frac{-3+2}{2} \ ; \ \frac{0+2}{2} \ ; \ \frac{-1+0}{2}\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{2} \ ; \ 1 \ ; \ -\frac{1}{2}\right)}$$

b. $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2-(-3) \ ; \ 2-0 \ ; \ 0-(-1)) = (5 \ ; \ 2 \ ; \ 1)$$

Puisque $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est de la forme :

$$5x+2y+z+d=0$$

Puisque I est un point de $\mathscr{P}$, on a :

$$d = -\left[5\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times 1-\frac{1}{2}\right] = -\left(-\frac{5}{2}+2-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Donc une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est :

$$\boxed{5x+2y+z+1=0}$$

c. Si C et D sont des points de $\mathscr{P}$, alors leurs coordonnées respectives vérifient l'équation de $\mathscr{P}$:

$$5\times(-1)+2\times\frac{1}{2}+3+1 = -5+1+4 = 0$$

Donc C est bien un point de $\mathscr{P}$.

$$5\times(-6)+2\times 0-1+1 = -30$$

Donc D n'est pas un point de $\mathscr{P}$.

2. a. Puisque Δ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$, un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de Δ. Donc d'après la question **1. b.** $\overrightarrow{\text{AB}}$ est un vecteur directeur de Δ.

La droite Δ est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(5 \ ; \ 2 \ ; \ 1)$ et passant par D $(-6 \ ; \ 0 \ ; \ -1)$, donc une représentation paramétrique de Δ est :

$$\boxed{\begin{cases} x &= -6+5k \\ y &= 2k \\ z &= -1+k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}}.$$

b. Le projeté orthogonal H de D sur le plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection de Δ et de $\mathscr{P}$ car Δ est la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par D.

Les coordonnées de H vérifient l'équation de Δ et celle de $\mathscr{P}$ donc du système :

$$\begin{cases} x &= -6+5k \\ y &= 2k \\ z &= -1+k \\ 5x+2y+z+1 &= 0 \end{cases}$$

Ce qui entraine :

$$5\times(-6+5k)+2\times 2k-1+k+1=0 \iff -30+25k+4k+k=0 \iff 30k=30 \iff \boxed{k=1}$$

On a alors :

$$\begin{cases} x_{\text{H}} &= -6+5\times 1 \\ y_{\text{H}} &= 2\times 1 \\ z_{\text{H}} &= -1+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{\text{H}} &= -1 \\ y_{\text{H}} &= 2 \\ z_{\text{H}} &= 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du point H sont donc $\boxed{\text{H}(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)}$.

c. La distance du point D au plan $\mathscr{P}$ est la longueur DH :

$$\text{DH}=\sqrt{\left[-1-(-6)\right]^2+(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{25+4+1}=\boxed{\sqrt{30}}$$

3. Les droites (CI) et (d) sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. D'après la représentation paramétrique de la droite (CI), un vecteur directeur de (CI) est $\vec{u}=(1\,;1\,;-7)$ et d'après la représentation paramétrique de (d), un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{v}=(5\ ;\ -12\ ;\ -1)$.

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1\times 5+1\times(-12)-7\times(-1)=5-12+7=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc orthogonaux, donc les droites (CI) et (d) sont orthogonales.

Elles sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les deux représentations paramétriques. En identifiant x, y et z, on obtient le système :

$$\begin{cases} -1+t &= -1+5s \\ \dfrac{1}{2}+t &= 2-12s \\ 3-7t &= -s \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 5s \\ 5s+12s &= 2-\dfrac{1}{2} \\ -35s+s &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 5s \\ 17s &= \dfrac{3}{2} \\ -34s &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} t &= \dfrac{15}{34} \\ s &= \dfrac{3}{34} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} x &= -1+\dfrac{15}{34} \\ y &= \dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{34} \\ z &= 3-7\times\dfrac{15}{34} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -\dfrac{19}{34} \\ y &= \dfrac{16}{17} \\ z &= -\dfrac{3}{34} \end{cases}$$

Les droites (CI) et (d) se coupent donc orthogonalement au point de coordonnées $\left(-\dfrac{19}{34}\ ;\ \dfrac{16}{17}\ ;\ -\dfrac{3}{34}\right)$.

Exercice 2 — 6 points

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Un village organise une fête.

Partie A

1. Choisir 3 personnes parmi les 15 revient à faire une combinaison de 3 parmi 15 (il n'y a ni remise ni ordre) :

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\times 12!} = \boxed{455}.$$

Il y a donc **455** façons de choisir les 3 personnes.

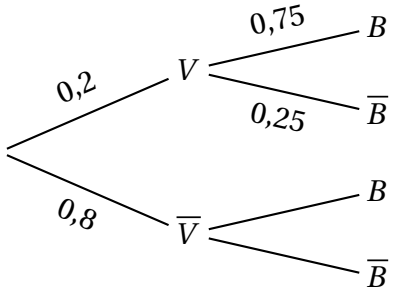
2. On choisit 1 homme parmi les 5 et 2 femmes parmi les 10. On a donc :

$$\binom{5}{1}\times\binom{10}{2} = 5\times 45 = \boxed{225}.$$

Il y a donc **225** façons de choisir les 3 personnes en respectant le souhait des organisateurs.

Partie B

1. D'après l'énoncé $P(V)=0{,}2$ donc $P\left(\overline{V}\right)=1-0{,}2=0{,}87$, $P_V(B)=0{,}75$, donc $P_V\left(\overline{B}\right)=1-0{,}75=0{,}25$.



2. On calcule $P(V\cap B)$:

$$P(V\cap B) = 0{,}2\times 0{,}75 = \boxed{0{,}15}.$$

La probabilité que le participant habite le village et consomme une boisson est donc **0,15** .

3. Les évènements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(V \cap B) + P\left(\overline{V} \cap B\right) = 0{,}15 + 0{,}8 \times P_{\overline{V}}(B) \iff 0{,}8P_{\overline{V}}(B) = P(B) - 0{,}15$$
$$\iff P_{\overline{V}}(B) = \frac{P(B) - 0{,}15}{0{,}8}$$

La moitié des participants a consommé une boisson donc $P(B) = 0{,}5$.

$$P_{\overline{V}}(B) = \frac{0{,}5 - 0{,}15}{0{,}8} = \frac{0{,}35}{0{,}8} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

Partie C

1. a. L'expérience consiste à répéter **5** fois de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli dont le succès « le lancer est réussi » a pour probabilité $\boldsymbol{p = 0{,}2}$. On a donc un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire N compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}2$.

$$\boxed{\boldsymbol{N} \text{ suit } \mathscr{B}\textbf{(5 ; 0,2)}}$$

b.

$$P(N = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}2^3 \times 0{,}8^2 = 10 \times 0{,}008 \times 0{,}64 = \boxed{0{,}051\,2}$$

c. On a $X = 10N$, donc par linéarité de l'espérance $E(X) = E(10N) = 10E(N)$ et par propriété de la variance $V(X) = V(10N) = 10^2 V(N)$. or :

$$E(N) = n \times p = 5 \times 0{,}2 = 1 \qquad ; \qquad V(N) = n \times p \times (1 - p) = 1 \times 0{,}8 = 0{,}8.$$

Donc :

$$E(X) = 10 \times 1 = \boxed{10} \qquad \text{et} \qquad V(X) = 100 \times 0{,}8 = \boxed{80}$$

2. L'évènement $\{Y = 24\}$ correspond à « obtenir 6 sur chaque dé ». Les dés sont équilibrés, on est donc dans un cas d'équiprobabilité, donc la probabilité d'obtenir 6 sur un dé est $\frac{1}{6}$. Les lancers sont indépendants, on a donc :

$$P(Y = 24) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \boxed{\frac{1}{1\,296}}.$$

3. On note $Z = X + Y$ le nombre total de points marqués sur l'ensemble des deux jeux.

- Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 10 + 14 = 24.$$

- Les deux jeux se déroulant de manière indépendante, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, donc

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 80 + \frac{35}{3} = \frac{275}{3}.$$

Le joueur gagne une peluche lorsque $Z \geqslant 44 \iff Z - 24 \geqslant 20 \implies |Z - 24| \geqslant 20$: l'évènement $\{Z \geqslant 44\}$ est inclus dans l'évènement $\{|Z - E(Z)| \geqslant 20\}$. Donc :

$$P(Z \geqslant 44) \leqslant P(|Z - E(Z)| \geqslant 20).$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Z - E(Z)| \geqslant 20) \leqslant \frac{V(Z)}{20^2} = \frac{275}{3 \times 400} = \frac{275}{1\,200} = \frac{11}{48} \leqslant \frac{12}{48} = 0{,}25.$$

La probabilité que le joueur gagne une peluche est inférieure ou égale à 0,25.

Exercice 3 — 4 points

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sont :

$$y(x) = K\,\mathrm{e}\,x$$

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\,\mathrm{e}\,x$ la solution particulière qui vérifie $f(1) = 1$:

$$f(1) = 1 \iff K\,\mathrm{e}\,1 = 1 \iff K = \frac{1}{\mathrm{e}} = \boxed{\mathrm{e}-1}$$

On a donc :

$$f(x) = \mathrm{e}-1\,\mathrm{e}\,x = \boxed{\mathrm{e}\,x - 1}.$$

On a alors :

$$f(0) = \mathrm{e}\,0 - 1 = \boxed{\mathrm{e}-1}.$$

L'affirmation est**VRAIE**.

2. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2.$$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 2}.$$

La suite (S_n) est donc convergente.

L'affirmation est **FAUSSE**.

3. On sait que, pour tout entier naturel n on a $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$. Donc :

$$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \iff n-1 \leqslant n+\cos n \leqslant n+1 \iff \frac{n-1}{n+1} \leqslant \frac{n+\cos n}{n+1} \leqslant \frac{n+1}{n+1} \iff \frac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

De plus on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$$

On a donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

L'affirmation est **VRAIE**.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2+4^{n+1}$. Alors on a :

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2+4^{n+1+1} = 2+4^{n+1}\times 4 = 8-6+4^{n+1}\times 4 = 4\left(2+4^{n+1}\right)-6 = \boxed{4v_n-6} \\ v_0 = 2+4^{0+1}2+4 = \boxed{6} \end{cases}.$$

L'affirmation est **VRAIE**.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1+\frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

Partie A

1. a.

$$f(1) = 1 + \frac{\ln(1)}{1} = 1 + \frac{0}{1} = \boxed{1} \quad ; \quad f(\mathrm{e}) = 1 + \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}} = \boxed{1 + \mathrm{e}^{-1}}$$

b.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+ \end{array}\right\} \overset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$$

c. Par croissance comparée on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, la droite d'équation $y = 1$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. a.

$$f'(x) = 0 + \frac{\dfrac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{1 - \ln(x)}{x^2}}$$

b. On a, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $x^2 > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$:

$$1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff -\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant \mathrm{e} \qquad \text{(car exp est croissante).}$$

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$1 + \mathrm{e}^{-1}$	↘	1

3. a.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(0-\dfrac{1}{x}\right)\times x^2 - [1-\ln(x)]\times 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{-x-2x\,[1-\ln(x)]}{x^4} \\ &= \frac{x\,[-1-2\,[1-\ln(x)]]}{x^4} \\ &= \frac{-1-2+2\ln(x)}{x^3} \\ &= \boxed{\frac{2\ln(x)-3}{x^3}} \end{aligned}$$

On a, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $x^3 > 0$. Donc $f''(x)$ est du signe de $2\ln(x)-3$:

$$2\ln(x)-3 \geqslant 0 \iff 2\ln(x) \geqslant 3 \iff \ln(x) \geqslant \frac{3}{2} \iff x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(car exp est croissante).}$$

Or, pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ par convexité de la fonction exponentielle. Donc :

$$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \geqslant \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2} \geqslant 2$$

Donc sur l'intervalle $]0\,;2]$ on a $f''(x) < 0$, donc la fonction f est concave sur $]0\,;2]$.

b. Une équation de la tangente T est :

$$y = f'(1)(x-1)+f(1) \iff y = \frac{1-\ln(1)}{1^2}(x-1)+1 \iff y = x-1+1 \iff \boxed{y=x}$$

c. Puisque, pour tout réel x de $]0\,;2]$, la fonction f est concave, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;2]$. Comme l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y=x$, on a, pour tout $x \in]0\ ;\ 2]$:

$$\boxed{f(x) \leqslant x}$$

Partie B

1. La fonction g définie sur $[1\,;2]$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\times\ln(x)$ est de la forme $u'\times u$ avec $u(x) = \ln(x)$. Donc une primitive de g est de la forme $\dfrac{u^2}{2}$. On a donc :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{[\ln(x)]^2}{2}\right]_1^2 = \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \frac{[\ln(1)]^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}[\ln(2)]^2}.$$

2. L'aire $\mathscr{A}$ est la mesure de la surface limitée part la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

On a vu à la question 3. c. de la partie **A** que sur $[0\,;2]$, et donc *a fortiori* sur $[1\,;2]$, $f(x) \leqslant x \iff x - f(x) \geqslant 0$.

Donc d'après l'interprétation géométrique de l'intégrale, l'aire $\mathscr{A}$ est en unité d'aire, l'intégrale sur $[1\,;2]$ de la fonction $x - f(x)$:

$$\mathscr{A} = \int_1^2 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right]\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x\,\mathrm{d}x - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

d'après la linéarité de l'intégrale.

$$\mathscr{A} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - [x]_1^2 - I = \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}$$

$$\mathscr{A} = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - (2-1) - \frac{1}{2}[\ln(2)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\ln(2)]^2 = \boxed{\frac{1-(\ln 2)^2}{2}}\ \text{(u. a.)}.$$

La calculatrice donne $\mathscr{A} \approx 0{,}26$ ce qui est vraisemblable sur la figure.