Baccalauréat épreuve de spécialité

Sujet 2

Voie générale – Amérique du Sud – 13 novembre 2026

A. P. M. E. P.

Exercice 1 — 5 points

Un sac opaque contient dix boules indiscernables au toucher et numérotées de 0 à 9.

Une partie d'un jeu consiste à tirer deux boules dans ce sac, successivement et sans remise, pour former un nombre à deux chiffres dont le premier chiffre est le numéro de la première boule tirée et le deuxième chiffre est le numéro de la deuxième boule tirée.
Par exemple si l'on tire successivement la boule 6 puis la boule 2 le nombre formé est 62.

Partie A

1. Justifier que l'on peut former 90 nombres différents à l'aide de ce processus.
2. Pour gagner à ce jeu il faut réaliser l'évènement S : « le nombre à deux chiffres ainsi formé contient deux chiffres tous deux inférieurs ou égaux à 5 ».
   a. Combien de nombres gagnants sont possibles à l'issue de ce jeu ? Justifier.
   b. On note $P(S)$ la probabilité de l'évènement S.
   Montrer que $P(S) = \dfrac{1}{3}$.
3. Parmi tous les nombres à deux chiffres que l'on peut former en jouant à ce jeu, combien ont au moins un des deux chiffres le composant qui soit supérieur ou égal à 8 ?

Partie B

Un joueur joue successivement 5 parties de ce jeu, en remettant entre chaque partie les deux boules tirées dans le sac.
On note alors X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par ce joueur, c'est-à-dire le nombre de fois où il réalise l'évènement S.
On rappelle que $P(S) = \dfrac{1}{3}$.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que ce joueur gagne exactement deux parties.
3. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère ici que le joueur joue n parties de ce jeu, en remettant entre chaque partie les deux boules tirées dans le sac, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par ce joueur.
   a. Montrer que $P(Y \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   b. Combien de parties ce joueur doit-il jouer au minimum pour que la probabilité qu'il en gagne au moins une, soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Partie C

Cette partie est indépendante des parties A *et* B.
On note Z la variable aléatoire qui à une partie de ce jeu associe le nombre à deux chiffres obtenu après une partie.
Dans la suite on admet que : $E(Z) = 49{,}5$ et $V(Z) = 815$.

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrer que l'on a :

$$P(|Z - 49{,}5)| \geqslant 40) \leqslant 0{,}51$$

2. En déduire que le nombre à deux chiffres obtenu à ce jeu a au moins 49 % de chances d'être compris entre 10 et 89.

Exercice 2 — 5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right) - a$$

où a est un entier.
Dans la partie A on étudiera le cas $a = 0$ et dans la partie B le cas $a = 1$.
On admet que la suite (u_n) ainsi construite est bien définie.

Partie A : cas $a = 0$

Dans cette partie, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right)$$

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.
   - **a.** Déterminer la valeur de v_0.
   - **b.** Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.
   - **c.** En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \ln(1 + 3n)$$

   b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : cas $a = 1$

La suite (u_n) est ici définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{u_n}\right) - 1$$

1. Calculer u_1 et montrer que $u_2 = \ln\left(3 + \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) - 1$.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \ln\left(3 + \mathrm{e}^{x}\right) - 1.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Dans la suite de l'exercice on remarquera que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

Montrer que $\ell = \ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}-1}\right)$.

5. Le script en langage Python ci-dessous est le script d'une fonction seuil qui prend en entrée un nombre réel d strictement positif et qui renvoie en sortie le premier indice n tel que :

$$u_n \geqslant \ell - d$$

```
L1  from math import *
L2  def seuil (d) :
L3      N = 0
L4      U = 0
L5      L = log(3/(exp(1)-1))
L6  ..........................
L7          U = log(3+exp(U))-1
L8          N = N+1
L9      return N
```

On rappelle que depuis la bibliothèque math en langage Python la fonction ln est notée log.

Parmi les quatre propositions ci-dessous, dire sans justification, laquelle doit être choisie à la ligne 6 du script afin que la fonction `seuil 1` retourne le résultat attendu.

Proposition 1 : « while U <= L + d : »

Proposition 2 : « while U > L + d : »

Proposition 3 : « while U < L - d : »

Proposition 4 : « while U >= L - d : »

Exercice 3 — 5 points

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'individus d'une espèce menacée présente dans un espace naturel.
Dans la partie A de cet exercice, nous étudierons une fonction f puis dans la partie B , nous étudierons l'évolution de cette espèce modélisée par cette fonction f.

Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{800}{1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}$$

On admet que cette fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A :

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(t) = \frac{1\,680\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right)^2}$$

b. Déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Montrer que l'ensemble des solutions positives de l'inéquation $f(t) > 500$ est l'intervalle :

$$\left]\frac{\ln(35)-\ln(3)}{0{,}3}\ ;\ +\infty\right[$$

4. **a.** Considérons la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(t) = \frac{8\,000}{3} \times \ln\left(\mathrm{e}^{0{,}3t}+7\right)$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. On admet que la fonction f' est dérivable sur l'intervalle $[O\ ;\ +\infty[$ et que sa fonction dérivée f'' est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f''(t) = \frac{504\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\left(7\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}-1\right)}{\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}\right)^2}$$

Montrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{10}{3}\ln(7)\right]$ puis concave sur l'intervalle $\left[\frac{10}{3}\ln(7)\ ;\ +\infty\right[$.

Partie B :

Au premier janvier 2025, on dénombre dans une réserve naturelle 100 individus d'une espèce menacée. À cette date, des décisions ont été prises par la direction de la réserve afin que l'espèce puisse se développer et voir sa population augmenter à l'avenir.
Dans cette réserve naturelle, on modélise le nombre d'individus de cette espèce par $f(t)$ où t est le temps écoulé en années après le premier janvier 2025 et la fonction f est celle étudiée dans la partie **A**.
Pour répondre aux questions de cette partie **B**, on pourra utiliser et admettre les résultats obtenus dans la partie **A**.
Selon ce modèle :

1. La population de cette espèce va-t-elle finir par se stabiliser ? Si oui, vers quelle valeur ?
2. Au cours de quelle année la population de cette espèce va-t-elle dépasser les 500 individus ?
3. Quelle sera la valeur moyenne du nombre d'individus de cette espèce dans cette réserve durant les dix premières années après le premier janvier 2025 ?
   Le résultat sera donné arrondi à l'unité près.
4. Le directeur de la réserve naturelle communique sur les réseaux sociaux en affirmant que durant les 10 premières années à partir de janvier 2025, la vitesse de croissance du nombre d'individus de cette espèce menacée ne va pas cesser d'augmenter.
   L'affirmation du directeur est-elle cohérente avec ce modèle ?

Exercice 4 — 5 points

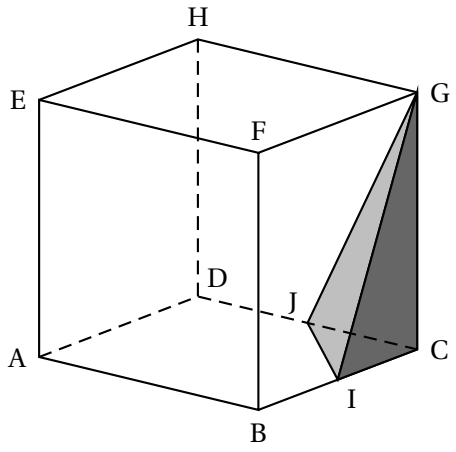
Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

1. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la mesure de sa hauteur relative à cette base.

On considère le cube ABCDEFGH de côté de longueur 6 cm représenté ci-dessous :



Le point I est le milieu du segment [BC] et le point J est le milieu du segment [CD].

Le volume du tétraèdre CIJG vaut :

a. 36 cm^3 **b.** 9 cm^3 **c.** 18 cm^3 **d.** 27 cm^3

Pour les questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

2. le plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et passant par le point K(5 ; 3 ; −1) admet pour équation cartésienne :

a. $x-2y+3z-3=0$ **b.** $x-2y+3z+5=0$
c. $x-2y+3z+4=0$ **d.** $5x+3y-z-35=0$

3. On considère les points R(2 ; −1 ; 3), S(4 ; 2 ; 2) et T(−2 ; 3 ; 1).
La droite qui passe par le point T et qui est parallèle à la droite (RS) admet pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+3t \\ z = 1+t \end{cases}$ avec t réel **b.** $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3+3t \\ z = 1-t \end{cases}$ avec t réel

c. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+3t \end{cases}$ avec t réel **d.** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+3t \\ z = 3-t \end{cases}$ avec t réel

4. Soit Q le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z-5=0$ et D la droite qui admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4+2k \\ y = 6+7k \\ z = 3+k \end{cases} \text{ avec } k \text{ réel}$$

On a :

a. La droite D est strictement parallèle au plan Q .

b. La droite D est sécante au plan Q et lui est orthogonale.

c. La droite D est sécante au plan Q mais ne lui est pas orthogonale.

d. La droite D est incluse dans le plan Q.

5. On considère les points M(0 ; 1 ; 2), N(3 ; 0 ; 2) et P(3 ; 1 ; 0). Une mesure en degré, arrondie au dixième près, de l'angle $\widehat{\text{MNP}}$ est :

a. 60,3° **b.** 37,9° **c.** 47,3° **d.** 81,9°