

Corrigé

Exercice PCM (2 points)

5. Comme $-0,0045 < 0$, par limite du produit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,0045t = -\infty$;

Puis, par composition : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,0045t} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$;

Enfin, par limite du produit et de la somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 10e^{-0,0045t} + 15 = 15$.

Après l'arrêt du système maintenant la face chaude à 25°C , la température de cette face va se stabiliser aux environs de 15°C .

6. g est de la forme : $g(t) = ke^{at}$ donc sa dérivée vérifie : $g'(t) = kae^{at}$.

Ainsi, pour tout t réel positif : $g'(t) = 10 \times (-0,0045e^{-0,0045t}) = -0,045e^{-0,0045t}$.

On arrive bien à l'expression annoncée dans le sujet.

7. On résout : $-0,045t + 25 = 15 \iff -0,045t = 15 - 25$

$$\iff -0,045t = -10$$

$$\iff t = \frac{-10}{-0,045}$$

$$\iff t = \frac{10\,000}{45} = \frac{2\,000}{9}$$

La solution de l'équation est $\frac{2\,000}{9} \approx 222$. En arrondissant à la dizaine de secondes, on a bien τ environ égal à 220 s.

8. $g(1\,100) = 10e^{-0,0045 \times 1\,100} + 15 = 10e^{-4,95} + 15 \approx 15,071$.

Au millième près, la température de la face chaude 1 100 s après que le système de chauffage a été arrêté est d'environ $15,071^\circ\text{C}$.

9. Ici, $5\tau \approx 5 \times 220 = 1\,100$, et effectivement, à ce moment-là (et à partir de ce moment-là, car la fonction g décroît vers sa limite), la température modélisée est à moins d'un dixième de degré de la température limite : le critère est validé.

Exercice maths (4 points)

Question 1 :

1. Pour une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad \text{où } C \text{ est un réel quelconque.}$$

Ici, on a : $a = -2$ et $b = 90$, donc $-\frac{b}{a} = -\frac{90}{-2} = +45$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\{x \mapsto C e^{-2x} + 45, \quad C \in \mathbb{R}\}$.

2. On cherche une fonction f dans cet ensemble des solutions, qui vérifie $f(0) = 30$.

$$f(0) = 30 \iff C e^{-2 \times 0} + 45 = 30$$

$$\iff C e^0 = 30 - 45$$

$$\iff C \times 1 = -15$$

$$\iff C = -15$$

La fonction cherchée a pour expression : $f(x) = -15 e^{-2x} + 45$.

Question 2 :

Le point est sur le cercle de centre O et de rayon 2, donc le module de z_A est $|z_A| = 2$.

On note θ un argument de z_A . Comme l'abscisse de A est 1, on sait que : $\cos(\theta) = \frac{1}{|z_A|} = \frac{1}{2}$.

On reconnaît le cosinus de $\frac{\pi}{3}$, mais ici, l'ordonnée de A est clairement négative, donc on veut un angle dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ ayant le même cosinus que $\frac{\pi}{3}$: grâce à la parité de la fonction cosinus, on sait que l'angle cherché est $-\frac{\pi}{3}$.

Ainsi, la forme exponentielle de z_A est : $z_A = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Question 3 :

1. On peut poser : $u : x \mapsto x + 2$ et $v : x \mapsto e^x$.

On a alors : $u' : x \mapsto 1$ et $v' : x \mapsto e^x$.

On a aussi : $g = \frac{u}{v}$ et donc : $g' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, pour tout } x \text{ réel : } g'(x) &= \frac{1 \times e^x - e^x \times (x + 2)}{(e^x)^2} = \frac{e^x \times (1 - (x + 2))}{(e^x)^2} = \frac{e^x \times (1 - x - 2)}{e^x \times e^x} \\ &= \frac{e^x \times (-1 - x)}{e^x \times e^x} = \frac{-1 - x}{e^x}. \end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression annoncée.

2. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc le signe de $g'(x)$ est le même que le signe de $-1 - x$.

$$-1 - x > 0 \iff -1 > x$$

$$\iff x < -1 \iff x \in]-\infty; -1[$$

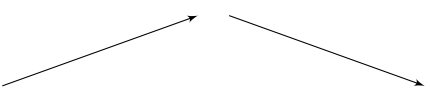
$$-1 - x < 0 \iff -1 < x$$

$$\iff x > -1 \iff x \in]-1; +\infty[$$

On peut donc dire :

- sur $] -\infty; -1[$, la fonction dérivée est à valeurs strictement positives, donc sur $] -\infty; -1]$, la fonction g est strictement croissante;
- sur $] -1; +\infty[$, la fonction dérivée est à valeurs strictement négatives, donc sur $[-1; +\infty[$, la fonction g est strictement décroissante.

On peut aussi faire un tableau de variations (sans limites) :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	0	-
variations de g			

Question 4

1. On a : $A = \ln\left(\frac{e^4}{e^{-2}}\right)$

$$= \ln(e^4) - \ln(e^{-2}) \quad \text{car } \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

$$= 4 - (-2) \quad \text{car, par définition : } \ln(e^a) = a$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6.$$

On a donc : $A = 6$.

2. $\ln\left(\frac{9}{4}\right) + \ln\left(\frac{8}{3}\right) = \ln\left(\frac{9}{4} \times \frac{8}{3}\right) \quad \text{car } \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$

$$= \ln\left(\frac{3 \times 3}{4} \times \frac{2 \times 4}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{1} \times \frac{2}{1}\right)$$

$$= \ln(3 \times 2)$$

$$= \ln(6).$$

On arrive bien à : $\ln\left(\frac{9}{4}\right) + \ln\left(\frac{8}{3}\right) = \ln(6).$