

Corrigé

Voie technologique – Série STI2D – Métropole – 16 juin 2026

Exercice PCM

4 points

4. Pour tout $t \in [0 ; +\infty[: y = T_1(t) = 11,5 e^{-0,006t} + 11,5$.

Donc : $y' = T_1'(t) = 11,5 \times (-0,006) e^{-0,006t} = -0,069 e^{-0,006t}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} y' + 0,006y &= -0,069 e^{-0,006t} + 0,006(11,5 e^{-0,006t} + 11,5) \\ &= -0,069 e^{-0,006t} + 0,069 e^{-0,006t} + 0,069 \\ &= 0,069. \end{aligned}$$

La fonction T_1 est donc bien solution de (E).

De plus : $T_1(0) = 11,5 e^{-0,006 \times 0} + 11,5 = 11,5 + 11,5 = 23$.

La fonction T_1 est bien la solution de (E) vérifiant $T_1(0) = 23$.

Correction alternative :

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$y' + ay = b \text{ avec } a = 0,006 \text{ et } b = 0,069.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} T_1(t) &= k e^{-at} + \frac{b}{a} \\ &= k e^{-0,006t} + \frac{0,069}{0,006} \\ &= k e^{-0,006t} + 11,5 \quad \text{où } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avec la condition initiale :

$$\begin{aligned} T_1(0) &= 23 \\ k e^{-0,006 \times 0} + 11,5 &= 23 \\ k e^0 &= 23 - 11,5 \\ k &= 11,5. \end{aligned}$$

La solution de (E) est donc bien : $T_1(t) = 11,5 e^{-0,006t} + 11,5$.

5. Comme $-0,006 < 0$, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,006t} = 0$.

Par conséquent : $\lim_{t \rightarrow +\infty} T_1(t) = 11,5 \times 0 + 11,5 = 11,5$.

La température de la boisson tend donc vers $11,5^\circ \text{C}$.

6. Trois heures correspondent à $3 \times 60 \times 60 = 10\,800$ secondes.

Le modèle donne : $T_1(10\,800) = 11,5e^{-0,006 \times 10\,800} + 11,5 = 11,5e^{-64,8} + 11,5$.

Comme $e^{-64,8}$ est très proche de 0, on obtient : $T_1(10\,800) \approx 11,5$.

Le modèle prévoit donc une température d'environ $11,5^\circ\text{C}$ au bout de 3 h.

Cependant, si la température extérieure reste égale à $23,0^\circ\text{C}$, la boisson ne peut pas durablement tendre vers $11,5^\circ\text{C}$: elle finirait par se réchauffer vers la température ambiante.

Le modèle ne peut donc pas être appliqué sur une durée aussi longue.

Exercice Maths

4 points

Question 1

1. Sur $[0 ; 2]$, la fonction f est positive. L'aire A du domaine hachuré est donc l'intégrale de f entre 0 et 2 :

$$A = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (8x + 1)e^{-x} dx.$$

2. On a admis qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x) = -(8x + 9)e^{-x}$.
On calcule alors :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= \left[-(8x + 9)e^{-x} \right]_0^2 \\ &= [-(8 \times 2 + 9)e^{-2}] - [-(8 \times 0 + 9)e^0] \\ &= -25e^{-2} + 9 \\ &\approx 5,62. \end{aligned}$$

L'aire du domaine hachuré est donc $9 - 25e^{-2}$ unité d'aire, soit environ 5,62 unités d'aire.

Question 2

1. Pour tout $x > 0$, la fonction g est dérivable et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 + 4 \times \frac{1}{x} \\ &= 2 + \frac{4}{x} \\ &= \frac{2x}{x} + \frac{4}{x} \\ &= \frac{2x + 4}{x}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $x > 0$, on a : $x > 0$ et $2x + 4 > 0$.

Donc $g'(x) > 0$, en tant que quotient de réels strictement positifs.

La fonction g est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Question 3

On a : $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

Son module vaut : $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$.

En factorisant le module, on a : $z = 4 \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{4} = 4 \left(\frac{-2\sqrt{3}}{4} + i \frac{2}{4} \right) = 4 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$.

On cherche un argument θ de z .

On a : $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, on peut donc prendre $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Ainsi, la forme exponentielle de z est : $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.