

Sujet

Exercice PCM (2 points)

Isolation écologique

Le chanvre est l'un des plus anciens isolants au monde. Plébiscité pour ses qualités thermiques et acoustiques, il est encore régulièrement utilisé aujourd'hui.

D'après <https://www.izi-by-edf-renov.fr/blog/isolation-chanvre>

On souhaite contrôler la qualité d'isolation d'une plaque de laine de chanvre. On dispose pour cela d'un fluxmètre permettant de mesurer le flux thermique à travers la plaque lorsque ses deux faces sont maintenues à des températures différentes : la face « chaude » à une température θ_1 et la face « froide » à une température θ_2 .

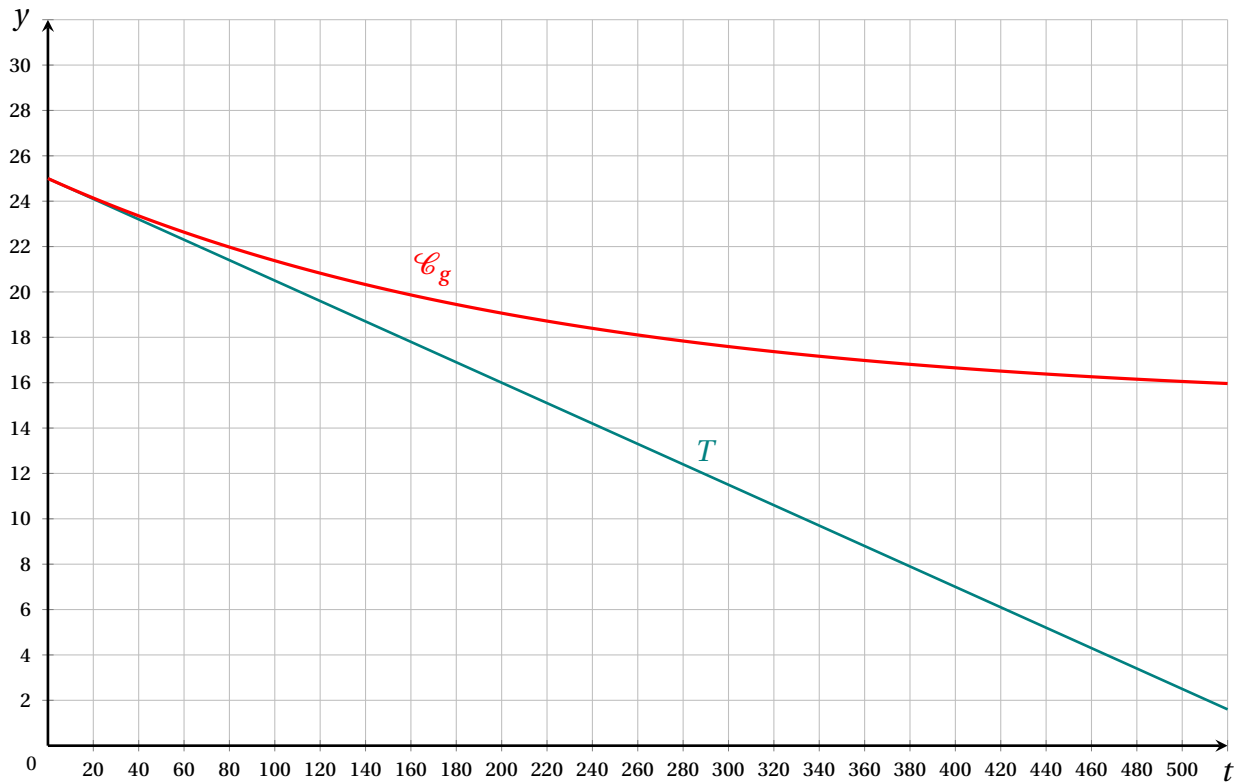
Le système permettant le maintien de la température de la face « chaude » à 25°C est arrêté.

On modélise l'évolution de la température (en °C) de la face « chaude » au cours du temps par une fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 10e^{-0,0045t} + 15$, où t est le temps exprimé en seconde.

5. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.

6. Montrer que pour tout t de $[0; +\infty[$, $g'(t) = -0,045e^{-0,0045t}$, où g' est la fonction dérivée de la fonction g .

La courbe représentative de la fonction g (notée $\mathcal{C}_g$) ainsi que sa tangente T au point d'abscisse 0 sont représentées dans le repère ci-dessous.



On admet que la tangente T a pour équation $y = -0,045t + 25$.

On appelle τ l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec la droite d'équation $y = 15$.

7. Justifier que 220 est une valeur approchée de τ à 10 secondes près.

8. Donner une valeur approchée de $g(1\,100)$ à 10^{-3} près.

En physique, on estime qu'à partir d'un temps supérieur à 5τ , la température obtenue est une bonne approximation de la température limite.

9. Indiquer si le modèle vérifie ce critère.

Exercice maths (4 points)

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

Question 1

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 90$ où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

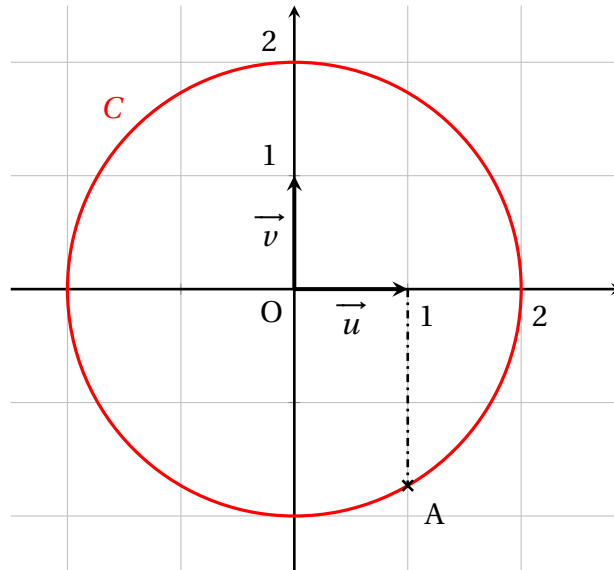
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Donner l'expression de la solution de (E) dont la courbe représentative dans ce repère passe par le point de coordonnées $(0; 30)$.

Question 2

Le cercle C de centre O et de rayon 2 est représenté ci-dessous, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Le point A d'abscisse 1 appartient au cercle C ; on note z_A l'affixe du point A .



Donner la forme exponentielle de z_A . Aucune justification n'est attendue.

Question 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x+2}{e^x}$$

1. On note g' la fonction dérivée de la fonction g . Montrer que pour tout x réel,

$$g'(x) = \frac{-1-x}{e^x}$$

2. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Question 4

1. Simplifier, en détaillant vos calculs, l'expression :

$$A = \ln\left(\frac{e^4}{e^{-2}}\right)$$

2. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln\left(\frac{9}{4}\right) + \ln\left(\frac{8}{3}\right) = \ln(6)$$