

Exercice PCM

4 points

Refroidir une boisson

Une élève de terminale STI2D a acheté des glaçons ayant des aspects très variés : matière plastique, acier inoxydable, pierre de granit.

Elle s'interroge sur leur efficacité en comparaison des glaçons traditionnels constitués d'eau sous forme de glace.

Elle réalise l'expérience suivante : après avoir versé 200 g d'eau dans quatre verres munis chacun d'un thermomètre, elle ajoute dans chacun un glaçon de volume identique, tout juste sorti du congélateur. Elle suit ensuite l'évolution de la température de l'eau de chaque verre en fonction du temps.

On s'intéresse à T_1 , la température de la boisson (en °C) refroidie avec les glaçons d'aspect plastique. La température T_1 est modélisée par la fonction définie pour tout $t \in [0 ; +\infty[$ par :

$$T_1(t) = 11,5 e^{-0,006t} + 11,5.$$

On admet que T_1 est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note T_1' sa dérivée.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + 0,006y = 0,069.$$

4. Montrer que T_1 est la solution de E vérifiant la condition $T_1(0) = 23$.
5. Déterminer la valeur de $\lim_{t \rightarrow +\infty} T_1(t)$.
6. En supposant que la température extérieure reste constante et égale à 23,0 °C, estimer la valeur de la température de la boisson au bout de 3 h.
Indiquer si le modèle mathématique précédent peut être appliqué dans ce cas.

Exercice Maths**4 points**

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres.

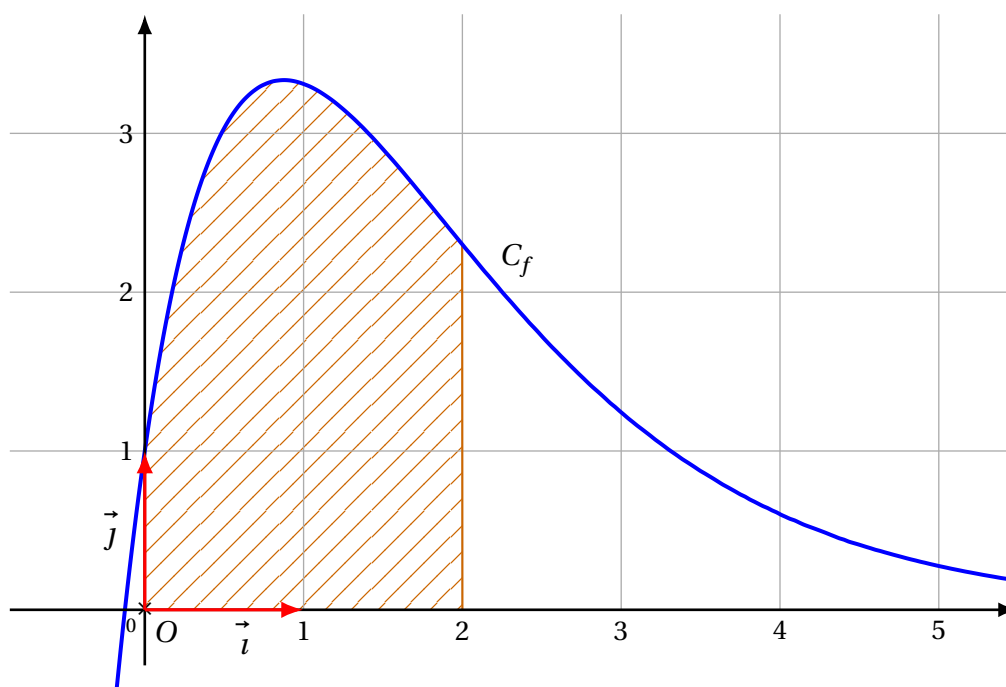
Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (8x + 1)e^{-x}.$$

On admet que $f(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à $[0 ; 2]$.

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, C_f désigne la courbe représentative de f .



On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -(8x + 9)e^{-x}.$$

On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On note A l'aire du domaine hachuré sur la figure ci-dessus, en unité d'aire.

1. Écrire A sous forme d'intégrale.
2. Calculer A , en détaillant les étapes. On donnera la valeur exacte du résultat, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Question 2

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x + 1 + 4\ln(x).$$

1. Montrer que $g'(x) = \frac{2x+4}{x}$, pour x appartenant à $]0 ; +\infty[$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.

Question 3

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le nombre complexe $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

Écrire le nombre complexe z sous forme exponentielle en détaillant les étapes de calcul.

On pourra s'aider du demi-cercle trigonométrique ci-dessous pour répondre à cette question.

