

Exercice 1

3. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C e^{ax}$, où C est une constante quelconque.

Nous avons donc $y(t) = C e^{-2,77 \times 10^{-3}t}$.

En utilisant la valeur initiale, déterminons C .

$$y(0) = C e^0 = C = 0,20.$$

Il en résulte $y(t) = 0,20 e^{-2,77 \times 10^{-3}t}$, c'est bien la fonction cherchée.

4. Déterminons la limite de la fonction y en $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -2,77 \times 10^{-3}t = -\infty. \quad \text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Par composition, on en déduit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2,77 \times 10^{-3}t} = 0$.

Par produit, on en déduit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 0,20 e^{-2,77 \times 10^{-3}t} = 0$.

5. Résolvons l'équation $y(t) = 0,10$.

$$0,20 e^{-2,77 \times 10^{-3}t} = 0,10$$

$$e^{-2,77 \times 10^{-3}t} = \frac{1}{2}$$

$$\ln(e^{-2,77 \times 10^{-3}t}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-2,77 \times 10^{-3}t = -\ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{2,77 \times 10^{-3}}$$

$$t = \frac{10^5 \ln(2)}{277}$$

$$t \approx 250,23$$

La solution de l'équation est $\frac{10^5 \ln(2)}{277}$, soit, arrondie à l'unité, 250.

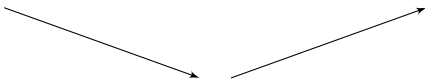
Exercice 3 (Mathématiques) 4 points

1. L'affirmation : « f admet un maximum en 0,5 sur $\mathbb{R}$ » est fausse.

La courbe coupe l'axe des abscisses en B, d'abscisse 0,5.

Elle est située en dessous de l'axe pour les valeurs inférieures strictement à 0,5 et au dessus de l'axe pour les valeurs strictement supérieures.

On peut donc établir un tableau de signe pour f' , et un tableau de variations pour f :

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	+
varia- tions de f			

d'après ces variations, on a un **minimum** pour la fonction f en 0,5.

2. Calculons $f(\ln(4))$.

Remarquons que : $\ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$ et $e^{\ln(4)} = 4$.

$$f(\ln(4)) = (2 \times 2\ln(2) - 3) e^{\ln(4)} = (4\ln(2) - 3) \times 4 = 16\ln(2) - 12$$

3. Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{d'où, par limite du produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

4. Nous voulons le plus petit entier i pour lequel $f(i) \geq 25$.

Nous ferons tourner la boucle tant que le contraire est vrai, donc le test de la boucle doit être $f(i) < 25$.

La boucle s'arrête dès que la valeur stockée dans la variable i contient une valeur dont l'image par f n'est pas strictement inférieure à 25, donc dont l'image est supérieure ou égale à 25.

L'affichage sera la valeur de i donc nous utiliserons le programme n° 1

5. a. Montrons que la fonction F , définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2x - 5)e^x$, est une primitive de la fonction f .

F est une primitive de f si $F' = f$

Dérivons F .

Nous pouvons considérer $F = uv$ où $u(x) = 2x - 5$ et $v(x) = e^x$.

$$F' = u'v + v'u, \quad u'(x) = 2 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x.$$

$$F'(x) = 2e^x + (2x - 5)e^x = (2x - 5 + 2)e^x = (2x - 3)e^x = f(x). \quad F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

- b. Calculons la valeur exacte de $\int_0^2 f(x) dx$.

$$\int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0), \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f.$$

$$F(2) = (2 \times 2 - 5)e^2 = -e^2 \quad F(0) = -5 \times 1 = -5 \quad \text{d'où}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = -e^2 - (-5) = 5 - e^2.$$