

∞ **Brevet de technicien supérieur session 2006** ∞
Comptabilité et gestion des organisations
Nouvelle-Calédonie

A. P. M. E. P.

Exercice 1

11 points

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 14]$ par

$$f(x) = \frac{x + 1 - \ln x}{x}.$$

1. a. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1; 14]$, $f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}$.
 b. Résoudre dans $[1; 14]$ l'inéquation $\ln x - 2 \geq 0$.
 En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[1; 14]$.
 c. Établir le tableau de variation de f sur $[1; 14]$.
2. a. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2} .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	14
$f(x)$			0,97						

- b. Construire la courbe représentative \mathcal{C} de f dans un repère orthogonal. Sur l'axe des abscisses, on prend un centimètre pour une unité et, sur l'axe des ordonnées, on prend dix centimètres pour une unité.
3. a. Résoudre dans $[1; 14]$ l'équation $f(x) = 1$.
 b. On note α la solution obtenue au a. Placer sur la figure le point I d'abscisse α .

B. Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[1; 14]$ par :

$$F(x) = x + \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Démontrer que F est une primitive de f sur $[1; 14]$.

2. On note $J = \int_1^{14} f(x) dx$.
 a. Démontrer que $J = \ln 14 - \frac{1}{2}(\ln 14)^2 + 13$.
 b. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-2} .

C. Application des résultats des parties A et B

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 400 exemplaires d'un certain type de pièce pour téléphone mobile.

On admet que, lorsque x centaines d'exemplaires de cette pièce sont fabriquées, $1 \leq x \leq 14$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est $f(x)$ euros, où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaine, pour que le coût moyen soit minimal.
Arrondir à 10^{-2} .
Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir au centime d'euro.
2. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaines, pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit un euro. Arrondir à 10^{-2} .
3. Dédire de la partie B la valeur moyenne de $f(x)$ lorsque x varie dans $[1 ; 14]$.
Donner le résultat arrondi au centime d'euro.

Exercice 2**9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité un certain modèle de stylo.

Dans les parties A et B, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale

On prélève un stylo, au hasard, dans une importante livraison destinée à une chaîne d'hypermarchés.

On note E l'évènement « un stylo prélevé au hasard est défectueux ».

On suppose que $P(E) = 0,016$.

On prélève au hasard vingt stylos dans la livraison pour vérification. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de vingt stylos à un tirage avec remise de vingt stylos.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de vingt stylos, associe le nombre de stylos défectueux de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il n'y ait aucun stylo défectueux.
3. En déduire la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins un stylo défectueux.

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les stylos sont livrés aux grandes surfaces par lots de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 stylos dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 stylos.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 stylos, associe le nombre de stylos défectueux parmi les 1 000 stylos. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1 000$ et $p = 0,016$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 17 stylos défectueux, c'est-à-dire calculer $P(Z \leq 17,5)$.

C. Probabilités conditionnelles

L'usine possède deux ateliers de fabrication, notés « atelier 1 » et « atelier 2 ».

L'atelier 1 produit 60 % de la production et l'atelier 2 produit le reste.

1 % des stylos provenant de l'atelier 1 sont défectueux et 2,5 % des stylos provenant de l'atelier 2 sont défectueux.

On prélève au hasard un stylo parmi la production totale des deux ateliers d'une journée.

On définit les évènements suivants :

A : « le stylo prélevé provient de l'atelier 1 » ;

B : « le stylo prélevé provient de l'atelier 2 » ;

D : « Le stylo prélevé est défectueux ».

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$, $P(D/B)$.
(On rappelle que $P(D/A) = P_A(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(D)$.