Session 2011

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

« COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée: 2 heures

Coefficient: 2

Matériel et documents autorisés :

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
Une feuille de papier millimétrée est fournie.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2

11-PO-CGMAT

EXERCICE 1 (9 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité deux types de pièces métalliques pour l'industrie : des pièces triangulaires et des pièces carrées.

A. *Probabilités conditionnelles*

On admet que 40 % des pièces de la production sont triangulaires, le reste est constitué par les pièces carrées.

Parmi les pièces triangulaires, 70 % ont une masse égale à 30 grammes, les autres ont une masse égale à 10 grammes.

Parmi les pièces carrées, 80 % ont une masse égale à 30 grammes, les autres ont une masse égale à 10 grammes.

On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée de ces deux types de pièces.

On considère les événements suivants :

T : « la pièce prélevée est triangulaire » ;

M : « la pièce prélevée a une masse égale à 30 grammes ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(T)$, $P_T(M)$ et $P_{\overline{T}}(M)$.

   (On rappelle que $P_T(M) = P(M/T)$ est la probabilité de l'événement M sachant que l'événement T est réalisé.)

2. Calculer $P(M \cap T)$ et $P(M \cap \overline{T})$.
3. Déduire de ce qui précède que $P(M) = 0{,}76$.
4. Calculer la probabilité qu'une pièce soit carrée sachant que sa masse est égale à 30 grammes. Arrondir à 10^{-2}.

B. *Événements indépendants*

Les pièces sont susceptibles de présenter deux défauts appelés « défaut 1 » et « défaut 2 ».

On prélève une pièce au hasard dans un lot important.

On note D_1 l'événement : « la pièce présente le défaut 1 » ;

On note D_2 l'événement : « la pièce présente le défaut 2 ».

On admet que les probabilités des événements D_1 et D_2 sont : $P(D_1) = 0{,}01$ et $P(D_2) = 0{,}02$.

On suppose de plus que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot présente les deux défauts.

2. Une pièce est jugée défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse.

C. Loi binomiale et loi normale

On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important de pièces est triangulaire ».

On suppose que la probabilité de E est 0,40.

On prélève au hasard 60 pièces dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces triangulaires de ce prélèvement.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 24 et d'écart type 3,8.

a. Justifier les paramètres choisis pour la loi normale.

b. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 24 et d'écart type 3,8.

Calculer la probabilité que le nombre de pièces triangulaires d'un prélèvement soit compris entre 20 et 28, c'est-à-dire : $P(19{,}5 \leq Y \leq 28{,}5)$. Arrondir à 10^{-2}.

EXERCICE 2 (11 points)

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0, 6] par $f(x) = (2x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. a) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle [0, 6], $f'(x) = (-2x+3)(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur [0, 6].

   c) Établir le tableau de variation de f sur [0, 6]. On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.

2. a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

   b) Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On prendra pour unités graphiques : 2 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 4 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

   c) Résoudre graphiquement dans [0, 6] l'équation $f(x) = 1$.

   Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

B Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0, 6] par : $F(x) = \left(-2x^2 - 7x - 7\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   Démontrer que F est une primitive de f sur [0, 6].

2. On note $I = \int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = 7 - 121\,\mathrm{e}^{-6}$.

C. Application des résultats des parties A et B.

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet, qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, exprimée en milliers de tonnes, est $f(x)$, où f est la fonction qui a été définie au début de la partie A.

1. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en milliers de tonnes ?
2. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site la production journalière après avoir atteint son maximum sera revenue à 1000 tonnes.
3. Déduire de la partie B. la valeur moyenne, V_m, de f sur [0, 6]. Arrondir V_m à 10^{-3}.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = ku'$	$(e^u)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt$$

3. PROBABILITES :

a) Loi binomiale

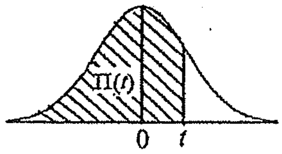
$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

CGMAT