

œ Brevet de technicien supérieur œ
Chimiste session 2007

A. P. M. E. P.

Exercice 1

8 points

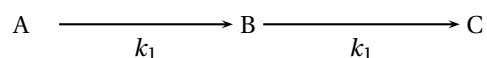
Deux chaînes de production C_A et C_B d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent, en très grande quantité, le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne C_A (respectivement C_B), associe sa masse en mg.
On sait que X_A (respectivement X_B) suit la loi normale de paramètres $(m_A ; \sigma_A)$ (respectivement $(m_B ; \sigma_B)$).
Un comprimé est jugé conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.
 - a. On donne $m_A = 896$ mg et $\sigma_A = 10$ mg. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans C_A soit conforme.
 - b. On donne $m_B = 900$ mg. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par C_B soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart type σ_B .
2. Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne C_A et 60 % de la chaîne C_B . La chaîne C_A produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne C_B en produit 3%.
On prélève au hasard un comprimé dans la production du laboratoire.
On note
 - A l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_A »,
 - B l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_B »,
 - C l'évènement « Le comprimé est conforme ».
 - a. À partir de l'énoncé, déterminer les probabilités des évènements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B que l'on notera respectivement $P_A(C)$ et $P_B(C)$.
 - b. Calculer alors la probabilité $P(C)$ de l'évènement C.
 - c. On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme.
Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne C_A .
3. Le contrôleur qualité n'étant pas satisfait de la production de la chaîne C_A , il décide de la faire régler. Après ce réglage, on teste l'hypothèse nulle $H_0 : m_A = 900$ mg, contre l'hypothèse alternative $H_1 : m_A \neq 900$ mg, au seuil de risque 5 %. On désigne par \bar{X}_A la variable aléatoire qui, à chaque échantillon non exhaustif de taille 100, associe sa masse moyenne en mg. Sous H_0 , on admet que \bar{X}_A suit la loi normale de paramètres $(900 ; 1)$.
 - a. Déterminer le nombre réel positif h tel que : $P(900 - h \leq \bar{X}_A \leq 900 + h) = 0,95$.
 - b. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
 - c. Un tirage de 100 comprimés dans la production de la chaîne C_A est effectué. La masse moyenne obtenue est $\bar{x} = 899$ mg. Appliquer le test.

Exercice 2**12 points****Étude de la cinétique de deux réactions successives du 1^{er} ordre**

On considère les réactions successives suivantes :

où k_1 , et k_2 désignent des nombres réels strictement positifs.On désigne par $a - x$, y et z les concentrations en mol.L⁻¹ à l'instant t des produits A, B et C (t est exprimé en minutes), a désignant la concentration à l'instant $t = 0$ du produit A, seul présent au début de la réaction. x , y et z sont des fonctions de t définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$.D'après la conservation de la matière on a : $x = y + z$. Les lois cinétiques donnent :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(a - x) & (1) \\ \frac{dy}{dt} = k_1(a - x) - k_2y & (2) \\ z = x - y & (3) \end{cases}$$

Partie A :

1. L'équation (1) s'écrit aussi : $x' + k_1x = k_1a$ (E_1) avec k_1 nombre réel positif non nul.
 - a. Résoudre l'équation homogène (E_0) : $x' + k_1x = 0$.
 - b. Déterminer une solution particulière $x_p(t)$ de (E_1) sous la forme d'une fonction constante.
 - c. En déduire la solution générale de (E_1).
 - d. Sachant que la solution x de (E_1) cherchée vérifie $x(0) = 0$, montrer que :

$$x(t) = a(1 - e^{-k_1t})$$

2. On suppose, dans cette question, que k_1 et k_2 sont des nombres réels positifs distincts.
 - a. Montrer que l'équation (2) équivaut à (E_2) :

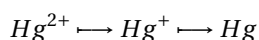
$$y' + k_2y = k_1ae^{-k_1t}$$

- b. Résoudre l'équation homogène (E'_0) : $y' + k_2y = 0$.
- c. Déterminer une solution particulière $y_p(t)$ de (E_2) sous la forme $y_p(t) = \lambda e^{-k_1t}$ où λ est une constante réelle à déterminer.
- d. En déduire la solution générale de (E_2).
- e. Sachant que $y(0) = 0$, montrer que : $y(t) = \frac{ak_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1t} - e^{-k_2t})$.

3. Donner l'expression de $z(t)$.

Partie B : Étude d'un exemple

Cas de la réduction d'un sel mercurique :

(en présence de H_2 sous pression constante), avec $a = 10^{-3}$ mol.L⁻¹, $k_1 = 0,0283$ min⁻¹ et $k_2 = 0,0033$ min⁻¹.

1. Vérifier que : $z(t) = 10^{-3}(1 + 0,132e^{-0,0283t} - 1,132e^{-0,0033t})$.

2. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$.
3. Déterminer la dérivée de la fonction z .
4. Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif: $e^{-0,0283t} < e^{-0,0033t}$.
5. En déduire le signe de $z'(t)$ et le sens de variation de z sur l'intervalle $[0; +\infty[$.