

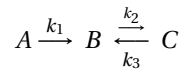
œ Brevet de technicien supérieur œ
Chimiste session 2008

A. P. M. E. P.

Exercice 1

12 points

On considère les réactions suivantes :



où k_1, k_2, k_3 désignent des constantes réelles strictement positives. À l'instant t , on désigne par $x(t), y(t), z(t)$ les concentrations respectives en mol.L^{-1} des produits A, B et C. Les lois de la cinétique chimique permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x \\ \frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y + k_3 z \\ \frac{dz}{dt} = k_2 y - k_3 z \end{cases}$$

On suppose que, pour cette réaction :

$$k_1 = 1 ; k_2 = 1 ; k_3 = 0,5 ; x(0) = 1 ; y(0) = 0 ; z(0) = 0.$$

On obtient ainsi le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = -x & (1) \\ y' = x - y + 0,5z & (2) \\ z' = y - 0,5z & (3) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1 ; y(0) = 0 ; z(0) = 0$.

Partie A

1. Résoudre l'équation (1). En déduire $x(t)$ en tenant compte de la condition initiale.
2. a. En utilisant l'équation (3), exprimer y en fonction de z et z' puis en déduire l'expression de y' en fonction de z'' et z' .
b. En reportant dans l'équation (2) les résultats obtenus aux questions 1. et 2. a., en déduire que z est solution de l'équation différentielle (E) : $z'' + 1,5z' = e^{-t}$.
3. a. Déterminer le réel α de sorte que la fonction $\varphi : t \mapsto \alpha e^{-t}$ soit une solution de l'équation (E).
b. Résoudre l'équation différentielle (H) : $z'' + 1,5z' = 0$. En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions z définies par :

$$z(t) = \lambda e^{-1,5t} + \mu - 2e^{-t}.$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

- c. En utilisant l'équation (3), en déduire l'expression de $y(t)$.
- d. Sachant que $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$, déterminer les constantes λ et μ .

Partie B

On considère les fonctions f , g et h définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(t) = e^{-t} \\ g(t) = e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-1,5t} + \frac{1}{3} \\ h(t) = -2e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-1,5t} + \frac{2}{3} \end{cases}$$

1.
 - a. Déterminer, en justifiant, la limite en $+\infty$ de la fonction g .
 - b. Montrer que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, g' peut s'écrire $g'(t) = e^{-t}(-1 + 2e^{-0,5t})$.
 - c. En déduire que la fonction g admet un maximum en un réel t_0 (on donnera la valeur exacte de t_0). Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du maximum de g (la valeur exacte n'est pas demandée).
2. Les trois courbes données sur le graphique en annexe sont les représentations graphiques des fonctions f , g et h .
 - a. Indiquer sur ce graphique laquelle des trois courbes est la courbe \mathcal{C}_g , laquelle est \mathcal{C}_f , laquelle est \mathcal{C}_h , en justifiant la réponse.
 - b. On admet que $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ sont les concentrations respectives des produits A, B, C à l'instant t .
Déterminer à l'aide du graphique une approximation de l'instant t_1 , à partir duquel la concentration de A devient inférieure à celle de B et une approximation de l'instant t_2 à partir duquel la concentration de C devient supérieure à celle de B. Placer t_1 et t_2 sur le graphique.

Exercice 2**8 points**

Une entreprise conditionne et commercialise un désherbant liquide à base de glyphosate en bidons de 540 millilitres.

Partie A

La machine qui remplit les bidons peut être réglée au moyen d'un dispositif gradué en millilitres. Lorsque celui-ci est réglé sur la valeur m , le volume moyen de désherbant par bidon est m . On suppose que la variable aléatoire X qui, à tout bidon choisi au hasard dans la production, associe le volume en millilitres de désherbant qu'il contient, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 5.

1. On règle le dispositif sur la valeur $m = 540$. Calculer la probabilité de l'évènement « $535 \leq X \leq 545$ ». On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
2. Sur quelle valeur m faut-il régler le dispositif pour que la probabilité de l'évènement « $X \leq 550$ » soit égale à 0,95 ? (La réponse sera arrondie à l'unité.)
3. Un bidon est commercialisable s'il contient au moins 530 millilitres de désherbant.

On suppose, dans cette question, que le réglage est tel que 2 % des bidons ne sont pas commercialisables. On prélève au hasard 100 bidons dans la production. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi obtenu, associe le nombre de bidons de l'échantillon non commercialisables,

- a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire Y ? Quels en sont les paramètres ? Justifier. Calculer l'espérance mathématique de Y .

- b. On admet qu'on peut approcher la loi précédente par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
- c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité de l'évènement « L'échantillon contient au plus 3 bidons non commercialisables ».

Partie B

Une grande surface de jardinerie qui reçoit un lot important de bidons de ce désherbant décide de contrôler la teneur en glyphosate du désherbant dont la valeur annoncée par le fabricant est de 170 g/L.

On désigne par μ la moyenne en g/L de la teneur en glyphosate des bidons du lot reçu par la grande surface.

On prélève au hasard un échantillon de 50 bidons dans le lot reçu afin de l'adresser à un laboratoire. Le lot est supposé assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note \bar{G} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 bidons prélevés au hasard dans le lot, associe la teneur moyenne en glyphosate en g/L de ces bidons.

On admet que la variable aléatoire \bar{G} suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,9.

La grande surface construit un test d'hypothèse :

l'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 170$

l'hypothèse alternative est $H_1 ; \mu \neq 170$

le seuil de signification est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle, déterminer le réel h tel que $P(170 - h \leq \bar{G} \leq 170 + h) = 0,95$.
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. Le résultat obtenu par le laboratoire pour la teneur moyenne en glyphosate des bidons de l'échantillon qui a été prélevé est $\bar{x} = 171,4$ g/L.
Au vu de ce résultat, la grande surface estime que le produit est conforme à ce qu'annonce le fabricant. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Annexe

