

œ Brevet de technicien supérieur œ
Conception de produits industriels session 2005

A. P. M. E. P.

Exercice 1

9 points

Les trois parties A, B, C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : y' + y = -e^{-x}.$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur \mathbb{R} , et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .
4. Déterminer la solution particulière f_1 de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie la condition initiale $f_1'(0) = 0$.

B. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -xe^{-x}$.

1. On note $I = \int_0^{0,1} g(x) dx$.

Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1,1e^{-0,1} - 1$.

2. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
- b.** En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction g est :

$$g(x) = -x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3. On note $J = \int_0^{0,1} \left(-x + x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx$.

Démontrer que $J = -\frac{0,1123}{24}$.

4. On considère l'affirmation suivante : le nombre $I - J$ est inférieur à 10^{-6} . Cette affirmation est-elle vraie ?

C. On considère l'équation différentielle

$$(E_2) : y'' - y = 2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et y' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' - y = 0$.

2. On admet que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_2) . En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2) .
3. Déterminer la solution particulière f_2 de l'équation différentielle (E_2) qui vérifie les conditions initiales $f_2(0) = 0$ et $f_2'(0) = 0$.

Exercice 2**7 points****Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

Dans le cadre d'accords sur la formation professionnelle, une grande entreprise a proposé à ses personnels un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de conception industrielle.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} .

A.

On note E l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage ».

On suppose que $P(E) = 0,3$.

On tire au hasard le nom de n personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

1. Dans cette question on prend $n = 15$.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 15 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

 - a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres,
 - b. Déterminer la probabilité qu'une personne au plus parmi les 15 dont le nom a été tiré au hasard ait suivi le stage.
2. Dans cette question on prend $n = 150$.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 150 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,3$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

 - a. Justifier les paramètres de cette loi normale.
 - b. Calculer la probabilité qu'au plus 40 personnes, parmi les 150 dont le nom a été tiré au hasard, aient suivi le stage, c'est à dire calculer $P(Z \leq 40,5)$.

B.

Dans cette entreprise 45 % du personnel a un niveau de qualification supérieur ou égal à « bac + 2 ».

L'évènement A : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 » a donc pour probabilité $P(A) = 0,45$.

On rappelle que l'évènement E : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage » a pour probabilité $P(E) = 0,3$.

Enfin, 35 % des personnes dont le niveau de qualification est supérieur ou égal à « bac + 2 » ont suivi le stage. Ce qui permet d'en déduire la probabilité conditionnelle $P_A(E) = 0,35$, ou $P(E|A) = 0,35$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage et a un niveau de qualification supérieur ou égal à bac + 2 ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne dont le nom a été tiré au hasard parmi les noms des personnes ayant suivi le stage a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 ».

Exercice 3**4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 4 cm.

À tout nombre réel t de l'intervalle $[0; 2]$, on associe le point $M(t)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x &= f(t) &= t^3 - 3t^2 + 3t \\ y(t) &= g(t) &= [\ln(1+t)]^2. \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[0; 2]$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0; 2]$ et regrouper les résultats dans un même tableau.
2. Donner un vecteur directeur pour chacune des tangentes à la courbe \mathcal{C} aux points $M(0)$, $M(1)$ et $M(2)$, obtenus pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.
3. Tracer les tangentes définies à la question 2. et la courbe \mathcal{C} .