

∞ Brevet de technicien supérieur Métropole ∞
Conception de produits industriels session 2007

A. P. M. E. P.

Exercice 1

8 points

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + \frac{5}{4}y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 2e^{-x} \sin \frac{1}{2}x.$$

1.
 - a. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
 - b. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{2}x$.
 - c. Dédire du 1 et du 2 que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = x - x^2 + x^2 \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. Dédire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative \mathcal{C} de f au point d'abscisse zéro.
3. Étudier la position relative de \mathcal{C} et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

Exercice 2

6 points

Soit f la fonction définie sur $]0; 3]$ par

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité graphique 4 cm.

A. Étude des variations et courbe représentative

1. Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $f(3)$.
2.
 - a. Démontrer que, pour tout x de $]0; 3]$, $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

- b. En déduire les variations de f sur $]0; 3]$.
3. On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe \mathcal{C} est l'axe des ordonnées. Construire la courbe \mathcal{C} sur une feuille de papier millimétré,

B. Calcul intégral

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe \mathcal{C} autour de l'axe des abscisses. On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide.

On admet que $V = \int_0^3 \pi [f(x)]^2 dx$.

- Vérifier que $V = \int_0^3 4\pi x e^{-x} dx$.
- À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$V = 4\pi(1 - e^{-3}).$$

- Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V .

Exercice 3

8 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 2 centimètres.

On souhaite construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré. Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$P_1(0; 1); P_2(2; 1); P_3(4; 3) \text{ et } P_4(6; 1).$$

- On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour t appartenant à $[0; 1]$ par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Montrer que, pour tout t de $[0; 1]$, $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser ce résultat dans la suite de l'exercice)

Dans la suite de cet exercice, on admet que, pour tout t de $[0; 1]$:

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

- La courbe B-spline Γ cherchée est la réunion de deux arcs de courbe Γ_1 et Γ_2 . Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que

$$\overrightarrow{OM_1(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_1(t)} + R_1(t)\overrightarrow{OP_2(t)} + R_2(t)\overrightarrow{OP_3(t)}.$$

Γ_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_2(t)} + R_1(t)\overrightarrow{OP_3(t)} + R_2(t)\overrightarrow{OP_4(t)}.$$

- Montrer que l'arc de courbe Γ_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1(t) &= f_1(t) &= 2t + 1 \\ y_1(t) &= g_1(t) &= t^2 + 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

- b.** Étudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0; 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.
- c.** On admet que l'arc de courbe Γ_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_2(t) = f_2(t) = 2t + 3 \\ y_2(t) = g_2(t) = -2t^2 + 2t + 2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

Étudier les variations de f_2 et g_2 sur $[0; 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

- d.** Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.
- e.** Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $M_2(1)$.
- f.** On rappelle que, dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité graphique est 2 centimètres.

Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe Γ aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$ puis l'arc de courbe Γ_1 . Construire, sur la même figure que Γ_1 , les tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $M_2(1)$ puis l'arc de Γ_2 .

Placer les points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 sur la figure.

- 3. a.** Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 .
- b.** Montrer que les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en I .
- c.** Montrer que la tangente commune à l'arc Γ_1 et à l'arc Γ_2 au point I est la droite (P_2P_3) .
- d.** Montrer que le point $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$ et que le point $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3P_4]$.