

Brevet de technicien supérieur Géomètre topographe session 2005

A. P. M. E. P.

Exercice 1

8 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm. On considère la courbe \mathcal{C} définie par son équation polaire :

$$r = f(\theta) = 2 \cos \theta - \cos^2 \theta \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

- Montrer que l'on peut restreindre l'étude des variations de la fonction f à l'intervalle $[0; \pi]$.
- Étudier les variations de la fonction f sur $[0; \pi]$ et dresser son tableau de variations.
- On note A, B, C, D et E les points de la courbe \mathcal{C} correspondant aux valeurs suivantes de θ : $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ et π .

Recopier et compléter le tableau suivant (en indiquant les valeurs exactes) :

Point	A	B	C	D	E
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r = f(\theta)$					
$r' = f'(\theta)$					

Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} aux points A, C et E.

- Représenter les cinq points A, B, C, D et E avec leurs tangentes respectives puis tracer la courbe \mathcal{C} .

Exercice 2

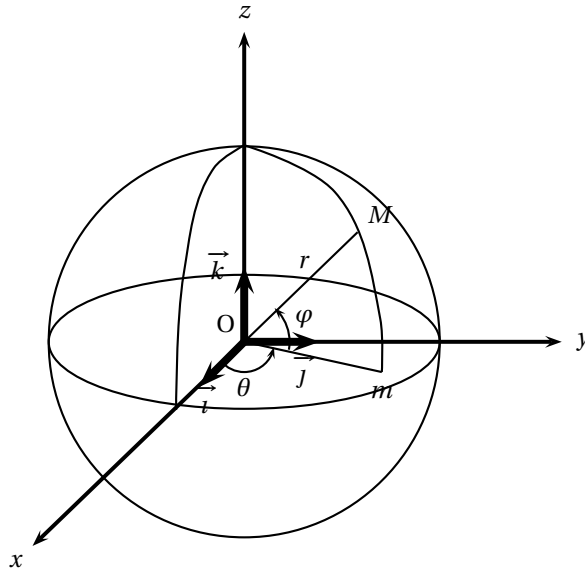
12 points

Partie A : ÉTUDE D'UNE INVERSION

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère l'inversion I de pôle $\Omega\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}; 0\right)$ et de puissance 3. L'unité de longueur est le cm.

- Donner une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon 3.
- Déterminer la nature de l'image \mathcal{P} de la sphère \mathcal{S} par l'inversion I .
- Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} .

Partie B : TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE



On rappelle que les coordonnées sphériques d'un point M appartenant à la sphère de rayon r et n'appartenant pas à l'axe (O, \vec{k}) sont données sous la forme d'un triplet (r, θ, φ) où :

$$r = OM \quad \theta = (\vec{i}, \overrightarrow{Om}) \quad \varphi = (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM}).$$

On considère les points A, B, C de l'espace dont les coordonnées sphériques sont :

$$A\left(3; 0; \frac{\pi}{4}\right) \quad B\left(3; \frac{\pi}{2}; 0\right) \quad C(3; 0; 0)$$

1. Déterminer les caractéristiques du triangle sphérique ABC.
2. Calculer l'aire du triangle sphérique ABC.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A, B et C.
4. On note A' , B' et C' les images respectives des points A, B et C par l'inversion I .
 - a. Calculer les coordonnées cartésiennes de A' .

b. On donne

$$x_{B'} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_{B'} = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{2}$$

$$x_{C'} = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad y_{C'} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

Indiquer les cotes des points B' et C' en justifiant la réponse.

5. Représenter graphiquement la sphère \mathcal{S} et les points A, B, C, Ω , A' , B' et C' .