

## Brevet de technicien supérieur session 2008 Géomètre topographe

A. P. M. E. P.

### Exercice 1

11 points

On rappelle la formule fondamentale de trigonométrie sphérique :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$$

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Sur la sphère  $(\Sigma)$  de centre O et de rayon 1, on considère les points N, S, A et B de coordonnées :

N	S	A	B
{ longitude 0° latitude 90°Nord	{ longitude 0° latitude 90°Sud	{ longitude 90°Est latitude 0°	{ longitude 45°Est latitude 30°Nord

1. Placer ces points sur la figure donnée en annexe.
2. Déterminer, par lecture directe ou par calcul, les longueurs des côtés du triangle sphérique ABS.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes de N, S et A.

Montrer que  $B\left(\frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{1}{2}\right)$ .

4. On rappelle que si le point  $M'$  est l'image du point  $M$  dans une inversion de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$ , on a  $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\Omega M^2} \overrightarrow{\Omega M}$ .

On considère l'inversion  $I$  de pôle N et de puissance 4. Quelle est l'image  $(P)$  de la sphère  $(\Sigma)$  privée de N par l'inversion  $I$ ? Justifier.  
Préciser une équation de  $(P)$ .

5. Soit E le point de coordonnées  $E(\sqrt{6}; \sqrt{6}; -1)$ .
  - a. Placer E sur la figure.
  - b. Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NE}$ .
  - c. Montrer que E est l'image de B par l'inversion  $I$ .
6. A, B et S définissent un cercle  $(\mathcal{C})$  dans l'espace. Soit  $A' = I(A)$ .
  - a. Placer  $A'$ . Par lecture sur la figure donner les coordonnées du point  $A'$ .
  - b. Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{n} = \overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SB}$ .  
En déduire une équation du plan (ABS).
  - c. Montrer que tous les points de  $(\mathcal{C})$  sont sur  $(\Sigma)$ .

### Exercice 2

9 points

Le but de cet exercice est l'étude de raccordements routiers de deux sections rectilignes par une section circulaire ou du quatrième degré.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la figure en fin d'énoncé schématise les différents raccordements de la section rectiligne [AB] avec la section rectiligne [EF].

- $(Oy)$  est axe de symétrie de la figure.
- $\mathcal{C}_1$  représente le raccordement circulaire.
- $\mathcal{C}_2$  représente le raccordement du quatrième degré.
- Les points A et B ont pour coordonnées  $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$  et  $B(-1; 1)$ .

**Partie A Sections rectilignes**

Les segments [AR] et [FE] sont donc symétriques par rapport à (Oy).

1. Déterminer les coordonnées des points E et F.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EF}$ . Montrer qu'ils sont orthogonaux.
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB). En déduire celle de (EF).

**Partie B Raccordement circulaire  $\mathcal{C}_1$** 

$\mathcal{C}_1$  passe par les points B et E et la droite (AB) est tangente à l'arc de cercle  $\mathcal{C}_1$ .

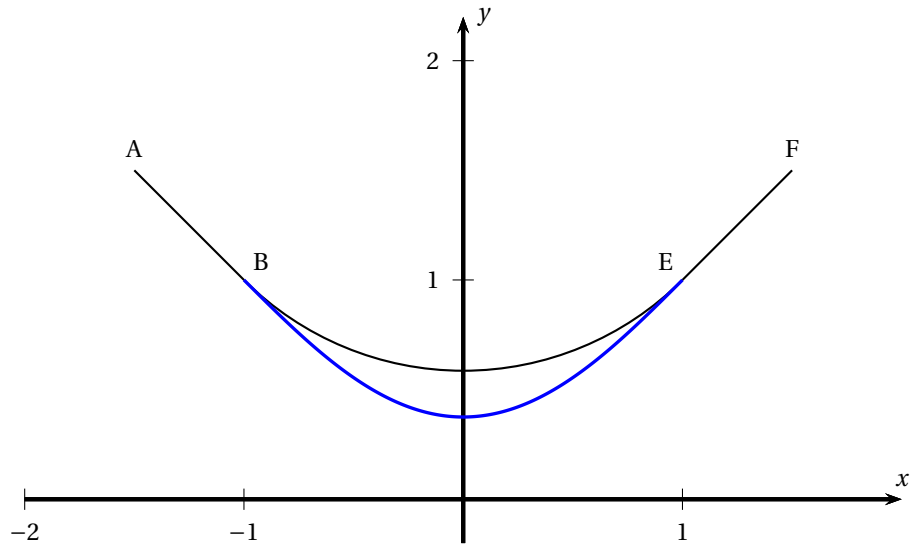
1. Justifier que le centre  $\Omega_1$  de l'arc de cercle  $\mathcal{C}_1$  est un point de l'axe (Oy).
2. Calculer les coordonnées de  $\Omega_1$ .
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du cercle support de  $\mathcal{C}_1$  est  $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ .
4. La courbure en un point quelconque du segment [AB] est nulle.  
Déterminer la courbure en un point quelconque de l'arc de cercle  $\mathcal{C}_1$ .  
On rappelle que la courbure est l'inverse du rayon de courbure

**Partie C Raccordement du quatrième degré**

*Le raccordement circulaire précédent créerait une rupture brutale de courbure en B comme en E. Le but est donc de créer un raccordement ne présentant pas cet inconvénient.*

La courbe  $\mathcal{C}_2$  est définie par l'équation  $y = f(x)$ .

1. Justifier que  $f(1) = 1$  et  $f'(1) = 1$ .
2. On rappelle que la courbure en un point d'abscisse  $x_0$  d'une courbe définie par l'équation  $y = f(x)$  est :  $\frac{1}{R} = \frac{f''(x_0)}{[1 + (f'(x_0))^2]^2}$ .  
Pour quelle raison veut-on que  $f''(1) = 0$  ?
3. On admet, à partir de maintenant, que  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ .  
Montrer que  $f(-x) = f(x)$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
4. Exprimer  $f(1)$ ,  $f'(1)$  et  $f''(1)$  en fonction des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
5. Résoudre le système : 
$$\begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ 4a + 2b & = & 1 \\ 12a + 2b & = & 0 \end{cases}$$
6. Montrer que  $f(x) = \frac{-x^4 + 6x^2 + 3}{8}$ .  
Calculer la courbure au point K de la courbe  $\mathcal{C}_2$  d'abscisse 0.  
En déduire le rayon de courbure en K puis les coordonnées du centre de courbure  $\Omega_2$ .



- ANNEXE à rendre avec la copie -

Figure de l'exercice 1 :

