

❧ **BTS Informatique de gestion épreuve facultative** ❧
Nouvelle-Calédonie novembre 2008

A. P. M. E. P.

Durée : 1 heure

coefficient : 1

ÉPREUVE FACULTATIVE

EXERCICE 1

10 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, d'origine O .

1. Calcul d'un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0.
 - a. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction u définie sur \mathbb{R} par : $u(x) = e^{-x^2}$.
 - b. En déduire que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $f(x)$ est de la forme : $f(x) = 2x - 2x^3 + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.
2. Soit (T) la tangente à \mathcal{C} au point O . Donner une équation de (T) puis déterminer, à l'aide de la question 1. b., la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente (T) au voisinage du point O .
3. Déterminer une primitive de f sur \mathbb{R} .
4. Soit a un réel strictement positif
 - a. Calculer l'intégrale : $I_a = \int_0^a f(x) dx$, dont la valeur dépend du réel a .
 - b. Étudier $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a$.

EXERCICE 2

10 points

Une compagnie de transport en commun a estimé qu'en 2007 le pourcentage de voyageurs qui fraudent a été de 10 %.

Au mois de janvier 2008 cette compagnie décide de contrôler au moins 400 voyageurs par jour.

Les statisticiens de la compagnie décident de construire un test qui, à la suite des contrôles sur un échantillon de 400 voyageurs, prélevé au hasard, permette de décider si, au seuil de signification de 5 %, le pourcentage de voyageurs qui fraudent est $p = 0,10$.

1. Construction du test bilatéral.

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 400 voyageurs que l'on peut supposer prélevés avec remise, associe le pourcentage de voyageurs qui fraudent.

On suppose que F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}\right)$.

 - a. Énoncer une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1 .
 - b. Déterminer, sous l'hypothèse H_0 , le réel positif h tel que :
 $P(p - h \leq F \leq p + h) = 0,95$. On donnera le résultat avec la précision permise par les tables.
 - c. Énoncer la règle de décision du test.

Au cours d'une journée de janvier 2008, les contrôleurs de la compagnie ont constaté 32 infractions à l'issue du contrôle de 400 voyageurs.

 - a. Calculer la proportion de voyageurs ayant fraudé.
 - b. En utilisant le test précédent, la compagnie peut-elle décider, au seuil de signification de 5 %, que le pourcentage global de fraudeurs a été sensiblement modifié ?