

Brevet de technicien supérieur
9 mai 2017 - groupement A1 - CIRA

A. P. M. E. P.

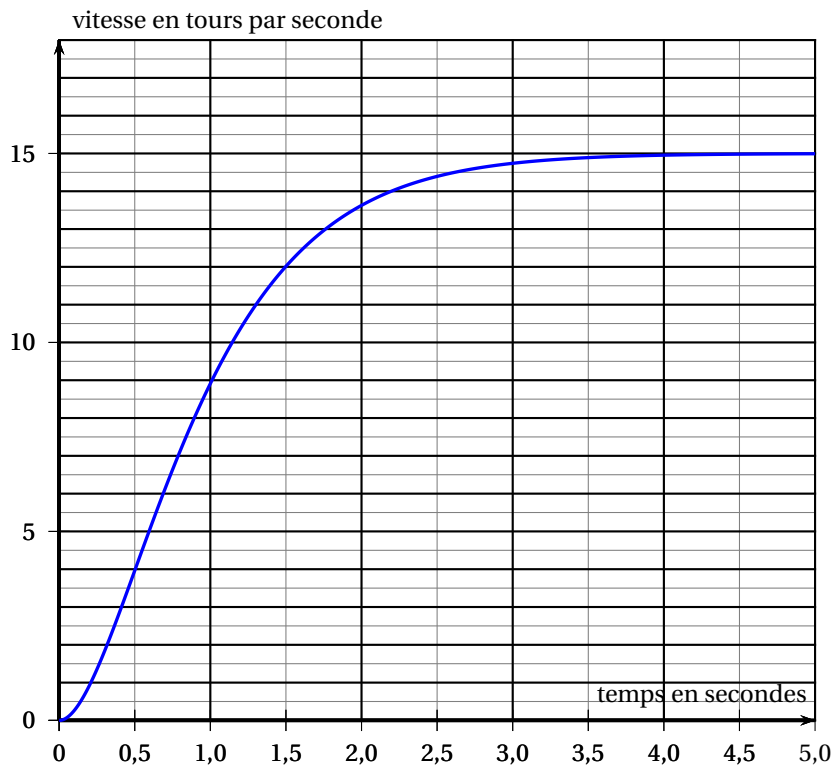
Exercice 1

11 points

Les 4 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution, en fonction du temps, de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu.

Partie A : Étude de la vitesse de rotation du moteur lors de son démarrage

Dans un premier temps, le moteur à courant continu utilisé n'est soumis à aucune charge mécanique. La vitesse de rotation de ce moteur, exprimée en tour par seconde (tour/s), est notée ω . Elle dépend du temps t , exprimé en seconde (s), écoulé depuis le démarrage du moteur. La courbe ci-dessous représente l'évolution de cette vitesse en fonction du temps.



1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la représentation graphique ci-dessus.
 - a. Quelle est la vitesse de rotation du moteur à l'instant $t = 0$?
 - b. Quelle est la vitesse de rotation du moteur une seconde après le démarrage?
 - c. Vers quelle valeur ω_S semble se stabiliser la vitesse de rotation du moteur?
 - d. Avec la précision permise par le graphique, déterminer au bout de combien de temps on atteint 95 % de la vitesse stabilisée. Expliquer.

2. On admet que, dans les conditions de fonctionnement étudiées dans la partie A, la vitesse de rotation du moteur est modélisée par la fonction ω définie pour $t \geq 0$ par :

$$\omega(t) = 15 - (30t + 15)e^{-2t}$$

- On note ω' la fonction dérivée de ω . Justifier que pour $t \geq 0$: $\omega'(t) = 60te^{-2t}$.
- En déduire le sens de variation de la fonction ω sur $[0 ; +\infty[$.
- Calculer $\omega'(0)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour les parties B et C de l'exercice

Équation différentielle sans second membre	Solutions sur \mathbb{R}
$ay'' + by' + cy = 0$ avec a , b et c des constantes réelles. Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ .	<ul style="list-style-type: none"> Si $\Delta > 0$: $t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, avec A, B constantes réelles et r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$: $t \mapsto (At + B)e^{rt}$, avec A, B constantes réelles et r la solution de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$: $t \mapsto e^{\alpha t}[A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]$, avec A, B constantes réelles et $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les solutions de l'équation caractéristique.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle permettant d'obtenir la vitesse de rotation

Sous certaines conditions de charge, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu soumis à une tension constante U , exprimée en Volt (V), est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \frac{1}{4}y'' + y' + y = \frac{U}{k}, \text{ où } k \text{ est une valeur caractéristique du moteur.}$$

- On note (E_0) l'équation homogène associée à (E) . On a donc :

$$(E_0) : \frac{1}{4}y'' + y' + y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) .

- Vérifier que la fonction constante $g : t \mapsto \frac{U}{k}$ est une solution de l'équation différentielle (E) .
- En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E) .
- En prenant $k = \frac{2}{3}$ et $U = 10$ V montrer que la fonction ω donnée dans la question A. 2. est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Partie C : Détermination de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu à partir des principes de la physique

D'une manière plus générale on démontre que la vitesse de rotation du moteur alimenté par une tension continue U vérifie l'équation différentielle

$$(E_1) : \alpha^2 y'' + 2m\alpha y' + y = \frac{U}{k},$$

où α , m et k sont des paramètres strictement positifs dépendant des caractéristiques physiques du moteur étudié (résistance, inductance, moment d'inertie).

Dans cette partie on prend : $U = 10$ V ; $\alpha = 0,3$; $m = 0,6$ et $k = \frac{2}{3}$.

L'équation différentielle (E_1) s'écrit donc :

$$0,09y'' + 0,36y' + y = 15.$$

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $0,09z^2 + 0,36z + 1 = 0$.
2. Parmi les quatre fonctions proposées ci-dessous, une seule est solution de l'équation différentielle (E_1) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
Quelle est cette fonction? Justifier la réponse.

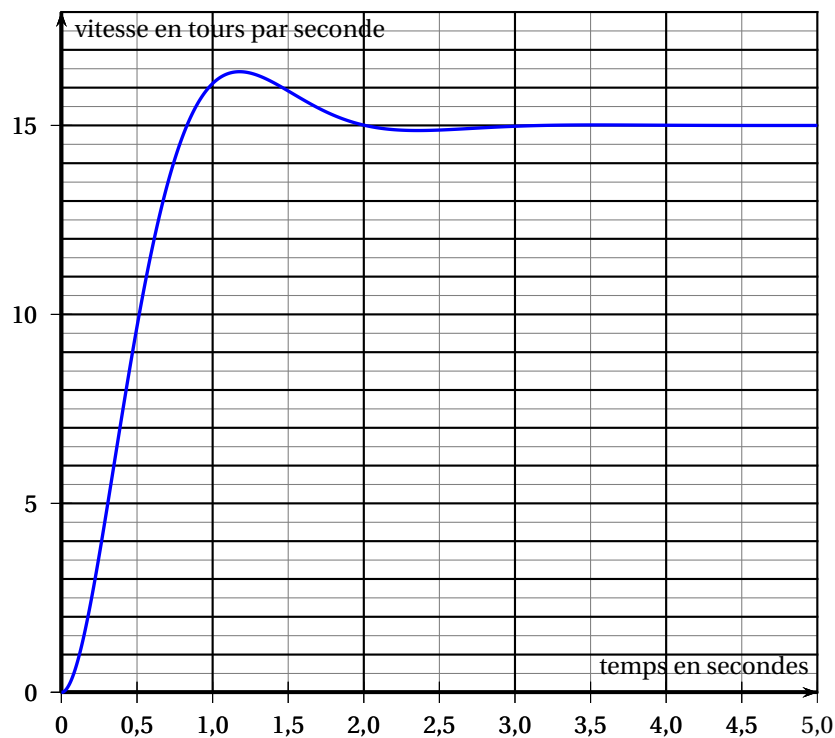
Fonction 1 : $t \mapsto 15 \left[1 - e^{-\frac{8}{3}t} \left(\cos(2t) + \frac{3}{4} \sin(2t) \right) \right]$

Fonction 2 : $t \mapsto 15 \left[1 - e^{-2t} \left(\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{8}{3}t\right) \right) \right]$

Fonction 3 : $t \mapsto 15e^{\frac{2}{3}t} - 15e^{-\frac{14}{3}t}$

Fonction 4 : $t \mapsto 15 - e^{-2t} \left[\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{8}{3}t\right) \right]$

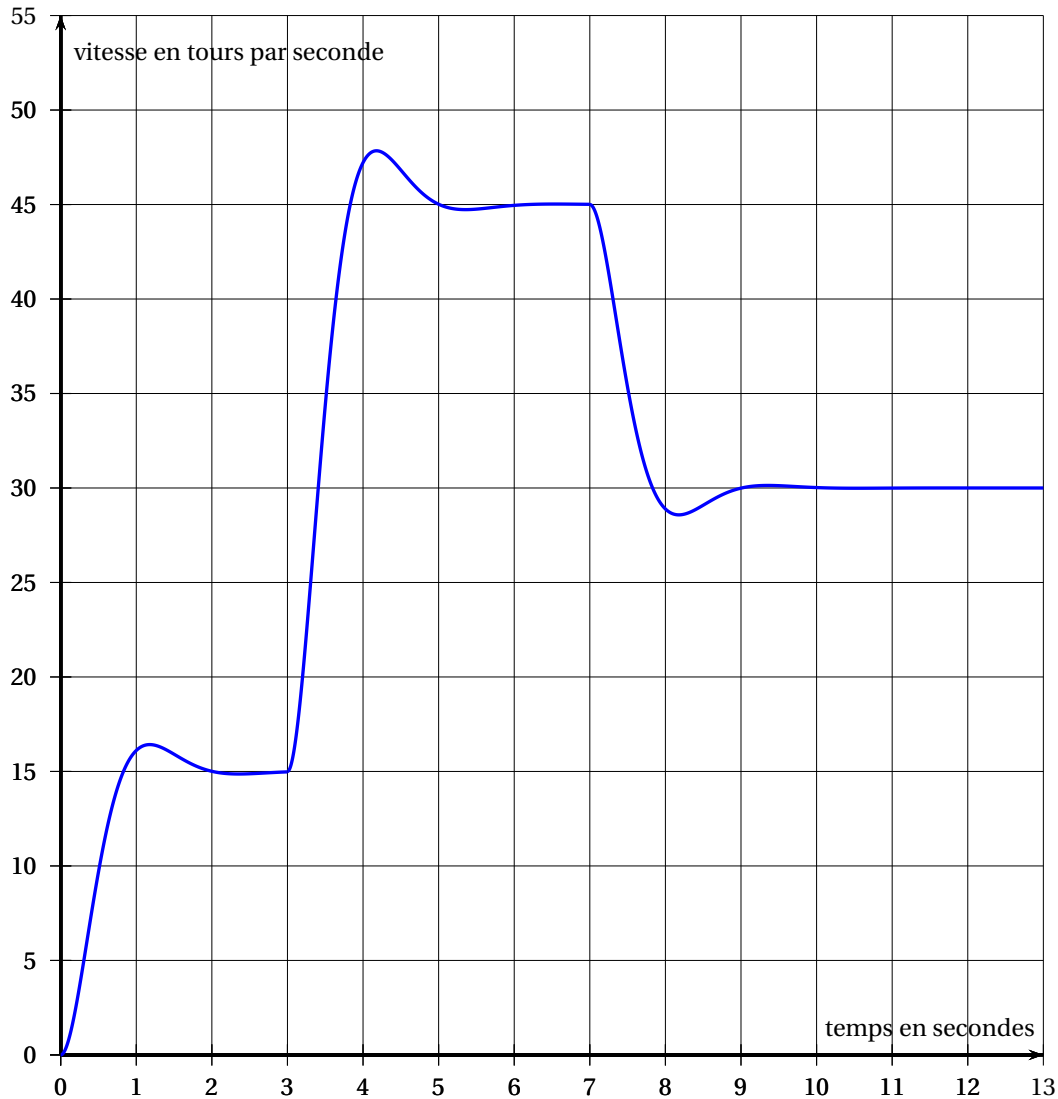
3. La solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ modélise l'évolution de la vitesse du moteur en fonction du temps dans les conditions étudiées dans la partie C. Elle est représentée ci-dessous.



D'après cette modélisation, quelle est la vitesse maximale du moteur?
À quel moment, environ, est-elle atteinte?

Partie D : Comportement d'un moteur soumis à différents sauts de tension

Une boucle de régulation de vitesse permet à présent de faire fonctionner le moteur à différentes vitesses. La tension d'entrée vaut successivement 10 V, 30 V puis 20 V. La vitesse de rotation du moteur est alors analysée et illustrée par le graphique ci-dessous.



1. Déterminer à l'aide du graphique les trois instants où les tensions ont été modifiées. On ne demande pas de justification.
2. Représenter sur le document réponse (page 9) la tension d'entrée e , exprimée en Volt, appliquée aux bornes du moteur en fonction du temps t , exprimé en seconde.
3. On désigne par \mathcal{U} la fonction causale unité. On rappelle que :

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \mathcal{U}(t) = 1 \text{ sinon.}$$

Pour exprimer la tension d'entrée $e(t)$ appliquée aux bornes du moteur à l'instant t un étudiant propose l'expression $e(t) = 10\mathcal{U}(t) + 30\mathcal{U}(t-3) - 20\mathcal{U}(t-7)$ et remplit le tableau donné sur le document réponse.

- a. Compléter, sur le document réponse, le tableau rempli par l'étudiant.
- b. Une fois qu'il a terminé de remplir le tableau, l'étudiant se rend compte qu'il a donné une expression inexacte de $e(t)$. Expliquer pourquoi.
- c. Donner l'expression exacte de $e(t)$. On n'attend pas de justification.

Exercice 2

9 points

Les deux parties suivantes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans n'importe quel ordre

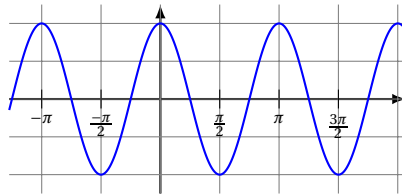
PARTIE A :

On appelle f la fonction définie sur \mathbb{R} , paire, périodique de période π , vérifiant :

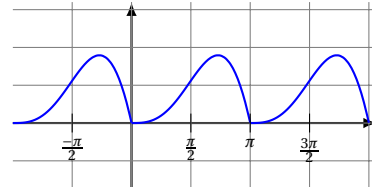
$$f(t) = t \sin(t) \quad \text{pour } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

1. Parmi les quatre courbes suivantes quelle est celle qui représente la fonction f ? On n'attend pas de justification.

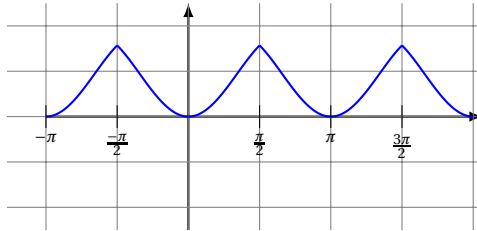
Courbe 1



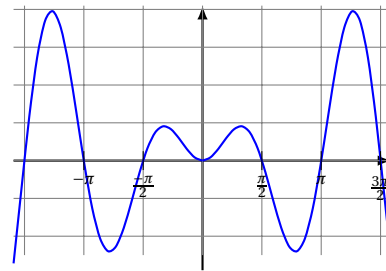
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



2. On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.

On note S son développement en série de Fourier.

On rappelle que :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}, T \text{ période de } f;$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt. \text{ Pour } n \geq 1 : a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

avec a constante réelle quelconque.

- a. Justifier que $b_n = 0$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.

- b. Montrer que la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = -t \cos(t) + \sin(t)$ est une primitive de la fonction définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto t \sin t$.
- c. La fonction étant paire et de période π , a_0 vérifie $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$.
Vérifier que $a_0 = \frac{2}{\pi}$. Écrire les étapes du calcul effectué.
- 3. On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{\pi} (-1)^n \left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)$
Donner les valeurs de a_1 et a_2 arrondies au millième.
- 4. On note f_e le nombre positif vérifiant $f_e^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt$.
On admet que l'expression $a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 (a_n^2 + b_n^2)$, obtenue d'après la formule de Parseval, permet d'obtenir la valeur approchée de f_e^2 au millième.
 - a. Calculer la valeur approchée de f_e^2 au millième.
 - b. Si f modélise un signal de période π , que représente f_e ?

PARTIE B : Étude de quelques propriétés d'un filtre numérique

- Le signal causal d'entrée d'un filtre numérique, noté $e(n)$, est l'échelon unité discret.
On a donc : $e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$
 - Le signal causal de sortie de ce filtre numérique est noté $x(n)$ et vérifie, pour tout entier relatif n : $x(n) - x(n-2) = 0,04e(n-1)$. (*)
1.
 - a. Justifier que $x(0) = 0$.
 - b. Calculer $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$ et $x(5)$. Détailler au moins un des calculs sur la copie.

Dans les questions 2 et 3, on note $E(z)$ et $X(z)$ les transformées en Z respectives des signaux causaux $e(n)$ et $x(n)$.

On donne les formules suivantes :

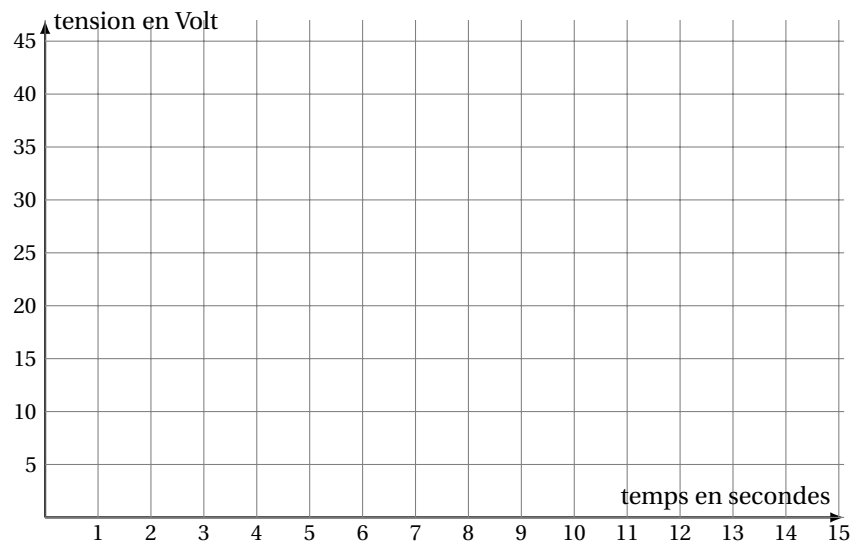
Signal causal	Transformée en Z
$n \rightarrow 1$	$\frac{z}{z-1}$
$n \rightarrow d(n)$ où $d(0) = 1$ et $d(n) = 0$ sinon.	1
$n \rightarrow n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$n \rightarrow a^n$ avec a réel non nul.	$\frac{z}{z-a}$
Propriétés	
$n \rightarrow x(n)$	$X(z)$
$y : n \rightarrow a^n x(n)$ avec a réel non nul	$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$
$y : n \rightarrow x(n - n_0)$ pour $n \geq n_0$	$Y(z) = z^{-n_0} X(z)$
$y : n \rightarrow x(n+1)$	$Y(z) = z[X(z) - x(0)]$
$y : n \rightarrow x(n+2)$	$Y(z) = z^2 [X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$

2.
 - a. Quelle est l'expression de $E(z)$?
 - b. Exprimer en fonction de z la transformée en Z de $0,04e(n-1)$.

- c. Exprimer en fonction de z et de $X(z)$ la transformée en Z de $x(n) - x(n-2)$.
- d. Dédire de l'égalité (*) que : $X(z) = \frac{0,04z^2}{(z-1)^2(z+1)}$.
3. On admet que $X(z)$ peut s'écrire : $X(z) = \frac{0,02z}{(z-1)^2} + \frac{0,01z}{z-1} - \frac{0,01z}{z+1}$.
- a. En déduire que pour tout entier naturel n : $x(n) = 0,02n + 0,01(1 - (-1)^n)$.
- b. On rappelle que : $(-1)^{2n+2} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$.
Montrer que $x(2n+1) = x(2n+2)$ pour tout entier naturel n .
- c. Représenter dans un repère à tracer sur la copie les termes du signal causal $x(n)$ pour n compris entre -2 et 6 .

DOCUMENT RÉPONSE à rendre avec la copie

EXERCICE 1 - PARTIE D - Question 2 :



EXERCICE 1 - PARTIE D - Question 3. a. :

t	$-\infty$	0	3	7	$+\infty$
$10\mathcal{U}(t)$					
$30\mathcal{U}(t-3)$					
$-20\mathcal{U}(t-7)$					
$e(t)$					