# Brevet de technicien supérieur
# session 2014 - groupement A2

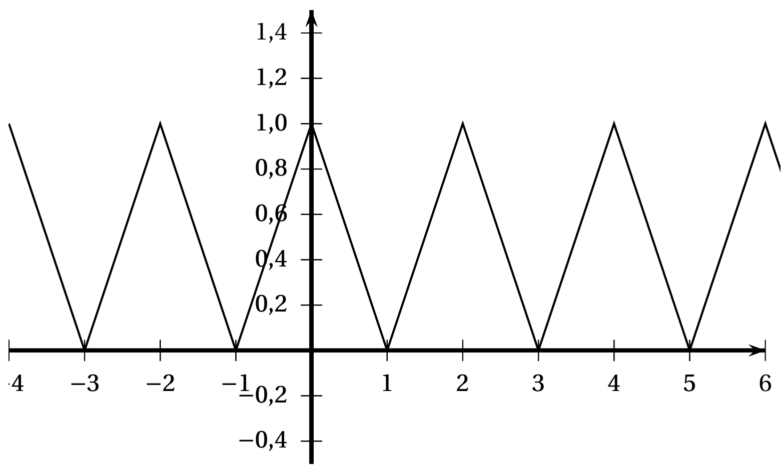
**Spécialités :**

— Électrotechnique
— Génie optique

**Exercice 1** **10 points**
**Toutes spécialités**

**Partie A**

On considère la fonction $f$, périodique de période $T$, dont une représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous.




Le développement en série de Fourier de la fonction $f$ est noté :

$$a_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)\right).$$

1. Cette question est un QCM.
   Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
   (a) La période $T$ de la fonction $f$ est :
   - 0,5
   - 1
   - 2
   - 3

   (b) Le coefficient $b_1$ vaut :
   - $-\dfrac{4}{\pi^2}$
   - 0
   - $\dfrac{1}{4}$
   -

   (c) Le nombre réel $a_0$ vaut :
   - 0
   - 0,25
   - 0,5
   - 12

(d) On donne l'égalité suivante

$$\int_0^1 (1-t)\cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi^2}.$$

La valeur exacte du coefficient $a_1$ est :

- $0$
- $\dfrac{4}{\pi^2}$
- $\dfrac{2}{\pi^2}$
- $\dfrac{1}{\pi^2}$

**Application de la formule de Bessel-Parseval**

2. On rappelle que la puissance moyenne $P_f$, par période du signal, modélisé par une fonction $f$ de période $T$ est donnée par

$$P_f = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $P_f = \dfrac{1}{3}$.

3. On note $g_n$ la fonction définie, pour tout nombre entier $n$ strictement positif par

$$g_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \left(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)\right)$$

et

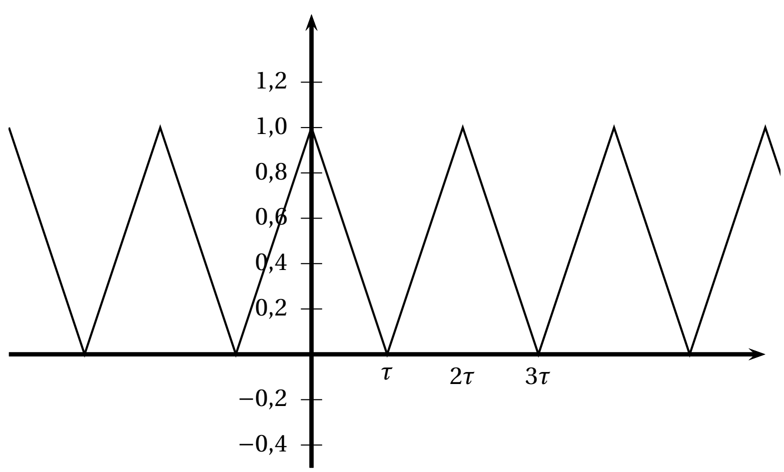
$$S_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

(a) Le tableau 1 du document réponse 1 fournit des valeurs approchées à $10^{-4}$ près de $S_n$. Compléter ce tableau.

(b) En déduire la plus petite valeur de l'entier $n$ telle que la puissance moyenne par période de la fonction $g_n$ est supérieure ou égale à $0,999P_f$.

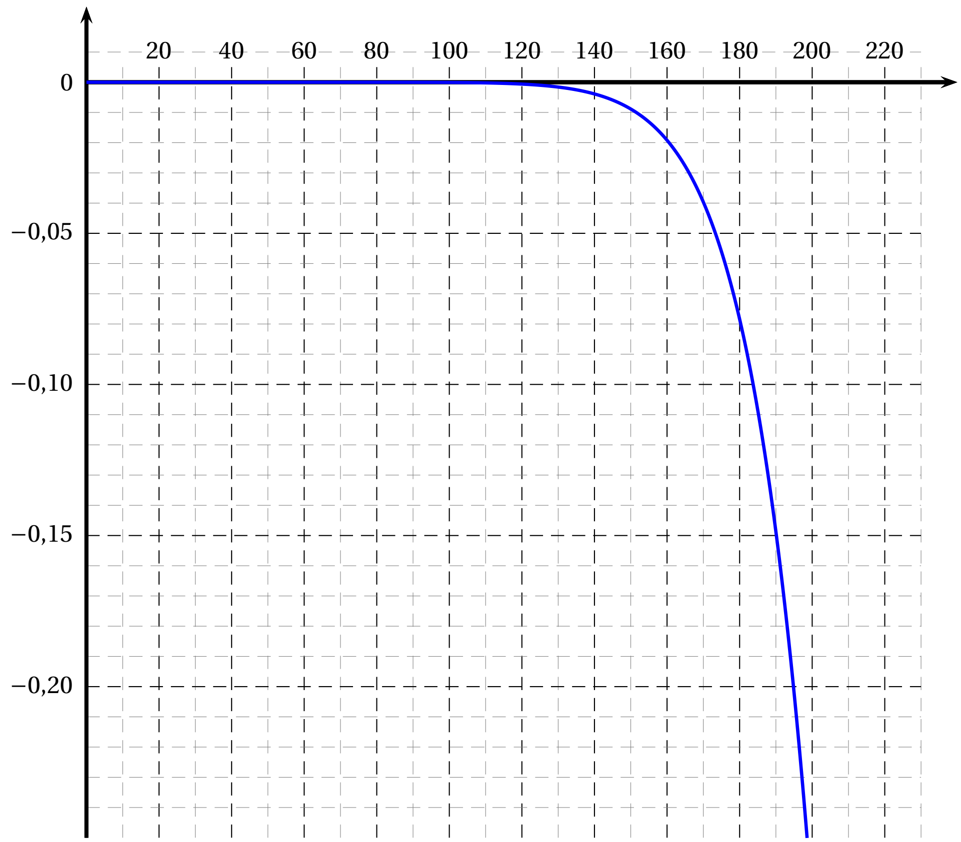
**Partie B**

Soit $\tau$ un nombre réel strictement positif.
On s'intéresse maintenant à la fonction $e$ représentant un signal de même forme que celui de la partie A, mais dont la période, exprimée en seconde, est $2\tau$ et dont le graphe est représenté ci-après.




Ce signal est placé en entrée d'un filtre passe-bas (il s'agit d'un filtre de Butterworth d'ordre 6 et de fréquence de coupure 40 Hz).
Le signal de sortie obtenu est modélisé par une fonction $h$.

1. On se place dans le cas où la fonction $e$ est telle que $\tau = 0,1$.
   La figure 1 du document réponse 1 donne une représentation graphique de la fonction $h$ sur l'intervalle $[-0,4\ ;\ 0,4]$, obtenue à l'aide d'un logiciel de simulation.
   (a) Déterminer graphiquement la valeur maximale $h_{\text{max}}$ de la fonction $h$.
   (b) Sur la figure 1 du document réponse 1, tracer la représentation graphique de la fonction $e$.
   (c) Le *facteur de crête* du signal $h$, exprimé en décibels, est défini par
   $$F_c = \frac{10}{\ln(10)} \ln\left(\frac{h_{\text{max}}^2}{P_h}\right).$$
   On a obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul numérique la valeur approchée suivante de la puissance moyenne par période $P_h$ du signal $h$ :
   $$P_h \approx 0{,}333\,30.$$
   En déduire une valeur approchée du facteur de crête $F_c$.
2. On note $G(\omega)$ le gain, exprimé en décibels, du filtre passe-bas en fonction de la pulsation $\omega$.
   Le graphique ci-après donne une représentation graphique de la fonction $G$ pour les « petites » valeurs de la pulsation $\omega$.




1. Déterminer graphiquement l'intervalle des valeurs de $\omega$ pour lesquelles on a
   $$G(\omega) \geqslant -0,1\text{db}$$
2. On donne l'expression de $G(\omega)$ :
   $$G(\omega) = \frac{-10}{\ln(10)} \ln\left[1 + \left(\frac{\omega}{80\pi}\right)^{12}\right].$$
   On note $\omega_0$ la solution de l'équation $G(\omega) = -0,1$.
   Déterminer, à $10^{-1}$ près, en précisant la démarche suivie, une valeur approchée de $\omega_0$

**Remarque :** *La notion de facteur de crête d'un signal est utile, par exemple, en télécommunications. On trouve aisément dans la littérature le facteur de crête du signal triangulaire e, à savoir* $4,77$ *db.*

**Exercice 2** **10 points**

**Groupement A2 : Spécialités Électrotechnique, Génie optique**

On s'intéresse à un dispositif comportant deux composants électriques A et B montés en parallèle. Si un seul de ces deux composants est défaillant, le dispositif continue à fonctionner.

**Partie A**

Dans cette partie, on étudie la durée de vie de ce dispositif.
La durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire.

1. On désigne par $t$ un nombre réel strictement positif. On admet que la probabilité $p(t)$ que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à $t$ est donnée par

$$p(t) = \int_0^t 0{,}000\,4\mathrm{e}^{-0{,}000\,4x}\,\mathrm{d}x.$$

   Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à 1 000 heures.

2. Sur le document réponse 2 est donné l'arbre pondéré décrivant la situation du dispositif au bout de 1 000 heures. $C_1$ désigne l'événement « le composant A est en état de fonctionnement » et $C_2$ désigne l'événement « le composant B est en état de fonctionnement ».
   (a) Compléter l'arbre du document réponse 2 et indiquer le détail des calculs des probabilités dans la colonne « Probabilités ».
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement $C_2$.
   (c) Les événements $C_1$ et $C_2$ sont indépendants ? Justifier la réponse.
   (d) Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, qu'au bout de 1 000 heures, le dispositif soit en état de fonctionnement.

**Partie B**

Dans cette partie, les résultats approchés seront arrondis à $10^{-3}$ près.
Une entreprise produit en grande série le composant A dont il est question dans la partie A. Une étude statistique permet d'admettre que la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 1 000 heures est 0,67. Les durées de vie des composants sont indépendantes les unes des autres.
Pour un échantillon de 50 composants, on note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures.

1. On admet que $X$ suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $p(X = 42)$.
3. Ci-dessous est donné un extrait du tableau, obtenu à l'aide d'un tableur, donnant les valeurs des probabilités $p(X \leqslant k)$, où $k$ désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,50]$.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $k$ | $p(X \leqslant k)$ | | |
| 2 | 38 | 0,937 149 61 | | |
| 3 | 39 | 0,968 259 95 | | |
| 4 | 40 | 0,985 629 89 | | |
| 5 | 41 | 0,994 231 41 | | |
| 6 | 42 | 0,997 973 63 | | |
| 7 | 43 | 0,999 387 18 | | |
| 8 | 44 | 0,999 843 76 | | |
| 9 | 45 | 0,999 967 36 | | |
| 10 | 46 | 0,999 994 64 | | |
| 11 | 47 | 0,999 999 35 | | |
| 12 | 48 | 0,999 999 95 | | |
| 13 | 49 | 1 | | |
| 14 | 50 | 1 | | |
| 15 | | | | |
| 16 | | | | |

À l'aide de ce tableau, déterminer la probabilité que le nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures parmi cet échantillon soit strictement supérieur à 42.

4. Sur l'annexe, le diagramme en bâtons représente les valeurs de $p(X \leqslant k)$ en fonction de $k$.
   (a) À l'aide de ce diagramme, déterminer le plus petit nombre entier naturel $k_1$ tel que

$$p\,(X \leqslant k_1) > 0,025,$$

   puis le plus petit nombre entier naturel $k_2$ tel que

$$p\,(X \leqslant k_2) > 0,975,$$

   (b) Peut-on affirmer : « *le nombre de composants dont la durée de vie est supérieure à* 1 000 *heures appartient à l'intervalle* [27 ; 40] *avec une probabilité supérieure à* 0,95 » ? Justifier la réponse.

**Partie C**

Dans cette partie, on décide d'approcher la loi de la variable aléatoire $X$ par la loi normale de moyenne 33,5 et d'écart type 3,3.
On note $Y$ une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $\mu = 33,5$ et d'écart type $\sigma = 3,3$.

1. Justifier le choix des paramètres $\mu$ et $\sigma$.
2. Calculer la. probabilité $P(Y \leqslant 42)$ arrondie à $10^{-2}$.
3. Déterminer la plus petite valeur, arrondie à $10^{-1}$, du nombre réel $a$ tel que

$$p(33,5 - a \leqslant Y \leqslant 33,5 + a) \geqslant 0,95.$$

**Document réponse 1 à rendre avec la copie,**
**Toutes spécialités**

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n^2$ | $0,1643$ | 0 | $0,0020$ | 0 | $0,0003$ | 0 |
| $S_n$ | $0,3321$ | $0,3321$ | | | | |

TABLE 1 – Puissances des harmoniques

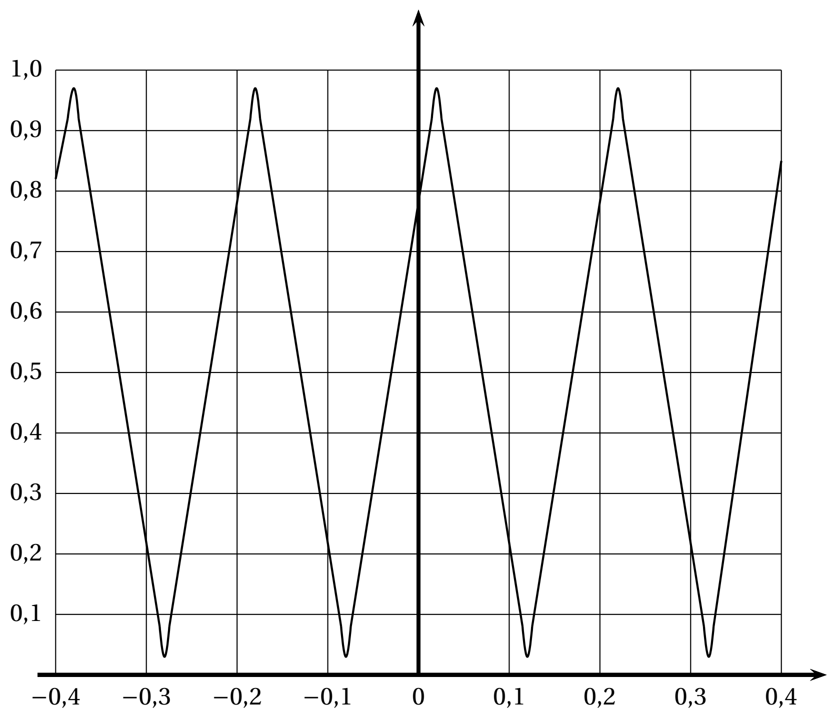



FIGURE 1 – La fonction $h$

**Document réponse 2 à rendre avec la copie**

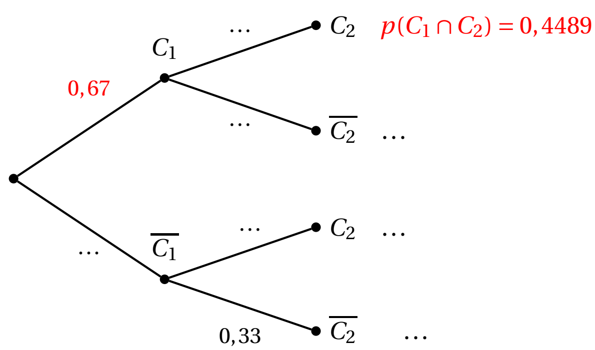



FIGURE 2 – Arbre pondéré

# Annexe

Annexe