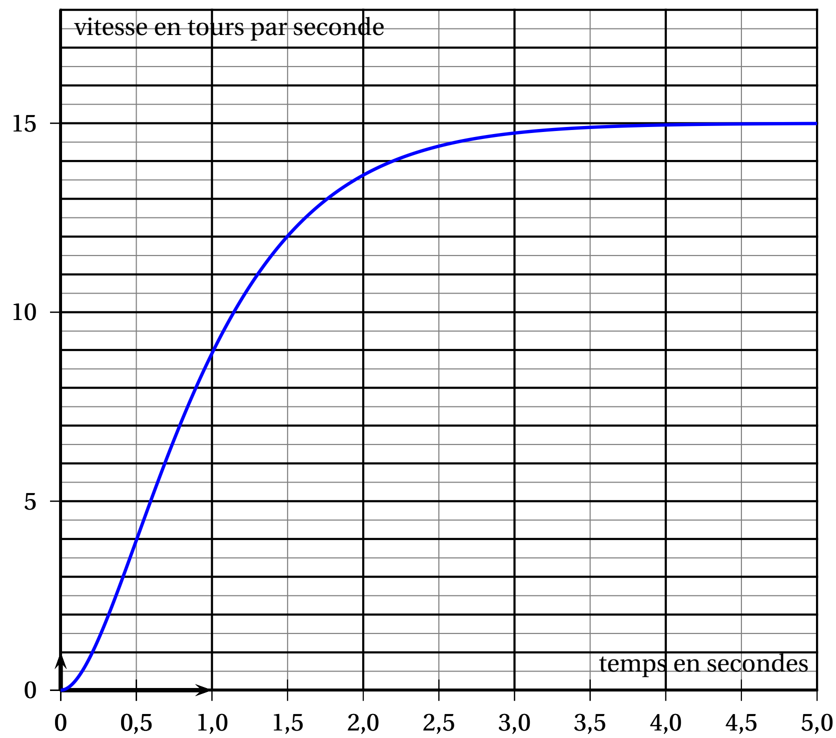
Brevet de technicien supérieur 9 mai 2017
groupement A2

Exercice 1 **11 points**

Les 4 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution, en fonction du temps, de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu.

Partie A : Étude de la vitesse de rotation du moteur lors de son démarrage

Dans un premier temps, le moteur à courant continu utilisé n'est soumis à aucune charge mécanique. La vitesse de rotation de ce moteur, exprimée en tour par seconde (tour/s), est notée ω. Elle dépend du temps t , exprimé en seconde (s), écoulé depuis le démarrage du moteur.
La courbe ci-dessous représente l'évolution de cette vitesse en fonction du temps.



1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la représentation graphique ci-dessus.

a. Quelle est la vitesse de rotation du moteur à l'instant t = 0 ?

b. Quelle est la vitesse de rotation du moteur une seconde après le démarrage ?

c. Vers quelle valeur ω_S semble se stabiliser la vitesse de rotation du moteur ?

d. Avec la précision permise par le graphique, déterminer au bout de combien de temps on atteint 95 % de la vitesse stabilisée. Expliquer.

2. On admet que, dans les conditions de fonctionnement étudiées dans la partie A, la vitesse de rotation du moteur est modélisée par la fonction ω définie pour $t \geqslant 0$ par :

$$\omega(t) = 15 - (30t + 15)\mathrm{e}^{-2t}$$

a. On note ω' la fonction dérivée de ω. Justifier que pour $t \geqslant 0$: $\omega'(t) = 60t\mathrm{e}^{-2t}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction ω sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. Calculer $\omega'(0)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour les parties B et C de l'exercice

Équation différentielle sans second membre	**Solutions sur $\mathbb{R}$**
$ay'' + by' + cy = 0$ avec a, b et c des constantes réelles. Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	• Si $\Delta > 0$: $t \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec A, B constantes réelles et r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique. • Si $\Delta = 0$: $t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{rt}$, avec A, B constantes réelles et r la solution de l'équation caractéristique. • Si $\Delta < 0$: $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$, avec A, B constantes réelles et $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$ les solutions de l'équation caractéristique.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle permettant d'obtenir la vitesse de rotation

Sous certaines conditions de charge, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu soumis à une tension constante U, exprimée en Volt (V), est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = \frac{\mathrm{U}}{k}, \text{ où } k \text{ est une valeur caractéristique du moteur.}$$

1. On note (E_0) l'équation homogène associée à (E). On a donc :

$$(E_0) : \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0).

2. Vérifier que la fonction constante g : $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{U}}{k}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).

4. En prenant $k = \dfrac{2}{3}$ et U = 10 V montrer que la fonction ω donnée dans la question A. 2. est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Partie C : Détermination de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu à partir des principes de la physique

D'une manière plus générale on démontre que la vitesse de rotation du moteur alimenté par une tension continue U vérifie l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad \alpha^2 y'' + 2m\alpha y' + y = \frac{\mathrm{U}}{k},$$

où α, m et k sont des paramètres strictement positifs dépendant des caractéristiques physiques du moteur étudié (résistance, inductance, moment d'inertie).

Dans cette partie on prend : U = 10 V ; $\alpha = 0,3$; $m = 0,6$ et $k = \dfrac{2}{3}$.

L'équation différentielle (E_1) s'écrit donc :

$$0,09y'' + 0,36y' + y = 15.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $0,09z^2 + 0,36z + 1 = 0$.

2. Parmi les quatre fonctions proposées ci-dessous, une seule est solution de l'équation différentielle (E_1) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
Quelle est cette fonction ? Justifier la réponse.

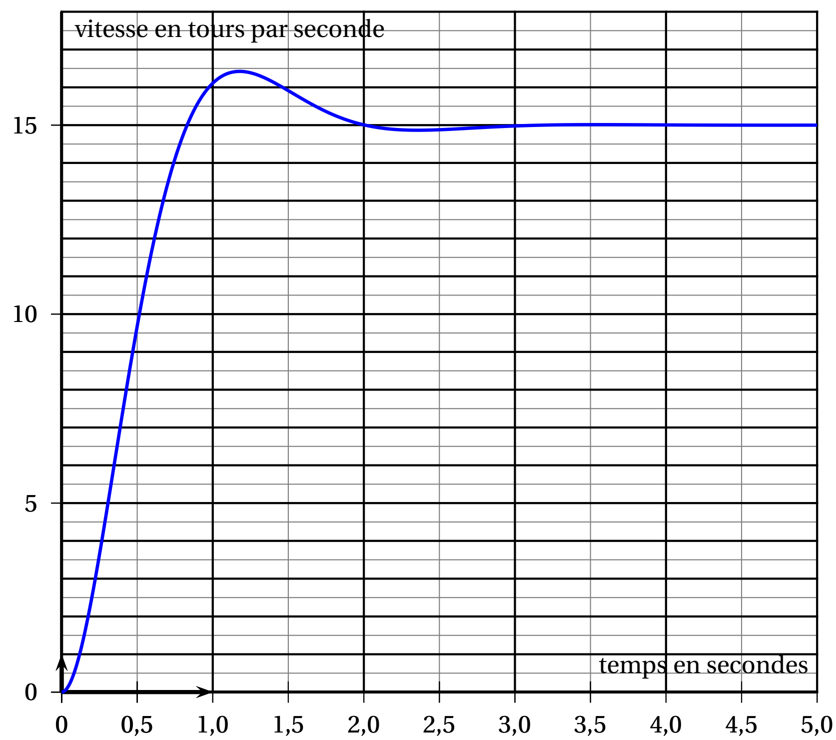
Fonction 1 : $t \longmapsto 15\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{8}{3}t}\left(\cos(2t) + \frac{3}{4}\sin(2t)\right)\right]$

Fonction 2 : $t \longmapsto 15\left[1 - \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right)\right]$

Fonction 3 : $t \longmapsto 15\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t} - 15\mathrm{e}^{-\frac{14}{3}t}$

Fonction 4 : $t \longmapsto 15 - \mathrm{e}^{-2t}\left[\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right]$

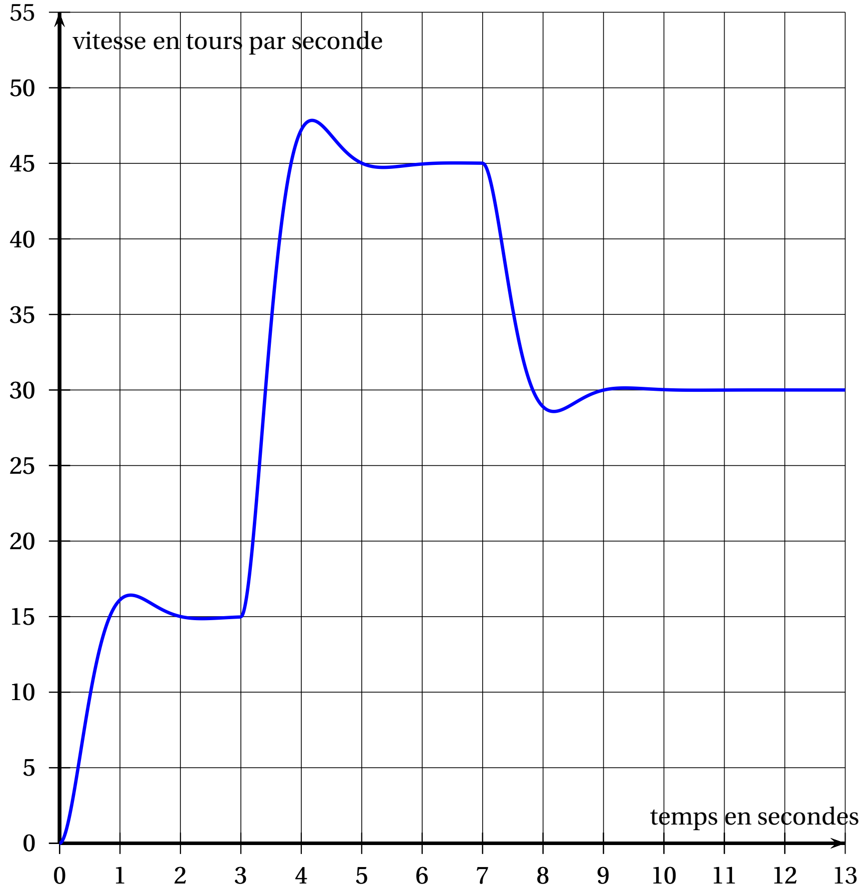
3. La solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ modélise l'évolution de la vitesse du moteur en fonction du temps dans les conditions étudiées dans la partie C. Elle est représentée ci-dessous.



D'après cette modélisation, quelle est la vitesse maximale du moteur ?
À quel moment, environ, est-elle atteinte ?

Partie D : Comportement d'un moteur soumis à différents sauts de tension

Une boucle de régulation de vitesse permet à présent de faire fonctionner le moteur à différentes vitesses. La tension d'entrée vaut successivement 10 V, 30 V puis 20 V. La vitesse de rotation du moteur est alors analysée et illustrée par le graphique ci-dessous.



1. Déterminer à l'aide du graphique les trois instants où les tensions ont été modifiées. On ne demande pas de justification.

2. Représenter sur le document réponse (page 9) la tension d'entrée e, exprimée en Volt, appliquée aux bornes du moteur en fonction du temps t, exprimé en seconde.

3. On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction causale unité. On rappelle que :

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \mathcal{U}(t) = 1 \text{ sinon.}$$

Pour exprimer la tension d'entrée $e(t)$ appliquée aux bornes du moteur à l'instant t un étudiant propose l'expression $e(t) = 10\mathcal{U}(t) + 30\mathcal{U}(t-3) - 20\mathcal{U}(t-7)$ et remplit le tableau donné sur le document réponse.

a. Compléter, sur le document réponse, le tableau rempli par l'étudiant.

b. Une fois qu'il a terminé de remplir le tableau, l'étudiant se rend compte qu'il a donné une expression inexacte de $e(t)$. Expliquer pourquoi.

c. Donner l'expression exacte de $e(t)$. On n'attend pas de justification.

Exercice 2 **9 points**

Les deux parties suivantes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans n'importe quel ordre

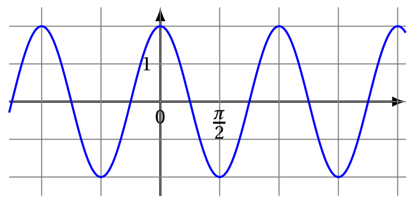
PARTIE A :

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période π, vérifiant :

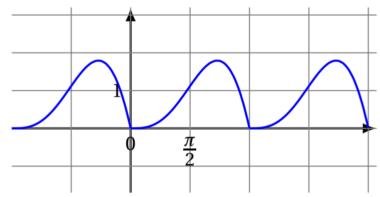
$$f(t) = t\sin(t) \quad \text{pour } t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

1. Parmi les quatre courbes suivantes quelle est celle qui représente la fonction f ? On n'attend pas de justification.

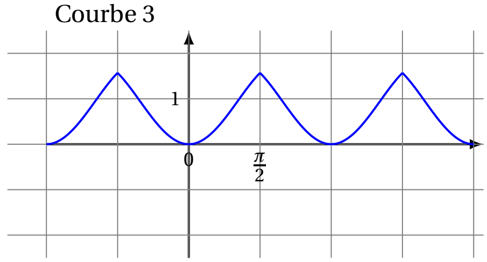
Courbe 1



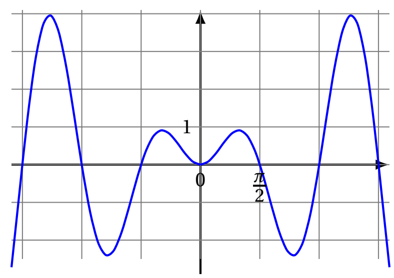
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



2. On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.
On note S son développement en série de Fourier.
On rappelle que :

> $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T période de f ;
> $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $n \geqslant 1$:
> $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$
> avec a constante réelle quelconque.

a. Justifier que $b_n = 0$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.

b. Montrer que la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = -t\cos(t) + \sin(t)$ est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto t\sin t$.

c. La fonction étant paire et de période π, a_0 vérifie $a_0 = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Vérifier que $a_0 = \frac{2}{\pi}$. Écrire les étapes du calcul effectué.

3. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$
Donner les valeurs de a_1 et a_2 arrondies au millième.

4. On note f_e le nombre positif vérifiant $f_e^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

   On admet que l'expression $a_0^2 + \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$, obtenue d'après la formule de Parseval, permet d'obtenir la valeur approchée de f_e^2 au millième.

   a. Calculer la valeur approchée de f_e au millième.

   b. Si f modélise un signal de période π, que représente f_e ?

PARTIE B :

Une entreprise produit en grande série des axes de rotation pour un modèle de moteur.
Ces axes sont fabriqués par dix machines identiques fonctionnant de manière indépendante et toujours ensemble pendant une période appelée *cycle de fabrication*.
Le service de maintenance annonce que la probabilité qu'une machine tombe en panne pendant un cycle de fabrication est de 0,02.

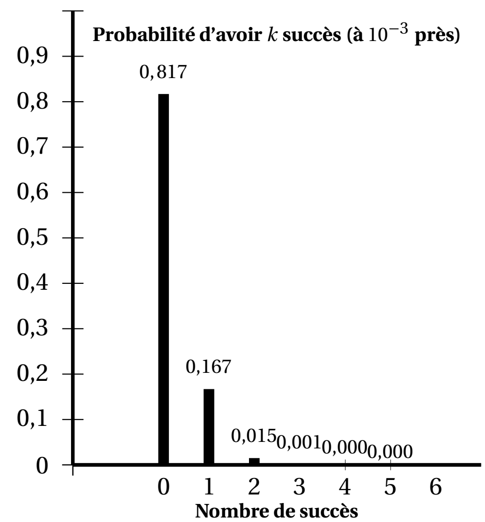
1. On admet que la variable aléatoire X qui à chaque cycle de fabrication associe le nombre de machines tombant en panne pendant ce cycle suit une loi binomiale.

   a. Quels sont les paramètres n et p de cette loi binomiale?

   En utilisant le graphique ci-contre, qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

   b. indiquer quelle est la probabilité p_1 qu'aucune machine ne tombe en panne pendant un cycle de fabrication;

   c. déterminer quelle est la probabilité p_2 qu'au moins deux machines tombent en panne pendant un cycle de fabrication.



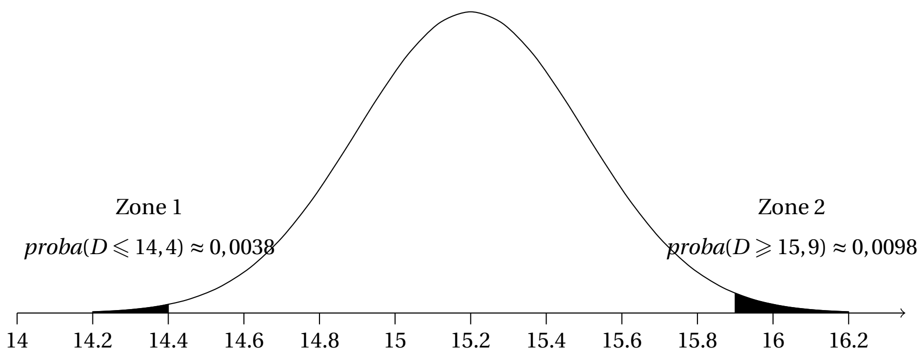
2. L'entreprise met en place un contrôle de qualité portant sur le diamètre des axes de rotation fabriqués. On appelle $\mathrm{L}_{\mathrm{C}_1}$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{C}_2}$ les *limites de contrôle*.

   On admet que $\mathrm{L}_{\mathrm{C}_1} = 14,4$ mm et $\mathrm{L}_{\mathrm{C}_2} = 15,9$ mm.

   On note D la variable aléatoire qui, à tout axe de rotation prélevé au hasard dans la production totale des dix machines pendant un cycle de fabrication, associe son diamètre exprimé en millimètres.

   On admet que D suit une loi normale de moyenne $\mu = 15.20$ et d'écart-type $\sigma = 0.3$.

   Un logiciel donne les résultats représentés ci-dessous :



a. Déterminer à 10^{-4} près la probabilité que le diamètre d'un axe pris au hasard dans la production soit compris entre les limites de contrôle.

b. Déterminer un intervalle $[\mathrm{L}_{\mathrm{S}_1} ; \mathrm{L}_{\mathrm{S}_2}]$ centré en $\mu = 15,20$ et tel que la probabilité que la variable D prenne une valeur entre $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_1}$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_2}$ soit environ égale à 0,95. Les nombres $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_1}$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_2}$ s'appellent les *limites de surveillance.*

3. Au cours d'un cycle de fabrication la procédure de contrôle suivante est mise en place.

Pour chaque machine on prélève au hasard un échantillon de 20 axes dans la production en cours de la machine, on mesure les diamètres des axes prélevés et on calcule le diamètre moyen des axes de l'échantillon, noté d.

— Si $d \notin [\mathrm{L}_{\mathrm{C}_1} ; \mathrm{L}_{\mathrm{C}_2}]$ alors le service de maintenance procède immédiatement au réglage de la machine.

— Si $d \in [\mathrm{L}_{\mathrm{C}_1} ; \mathrm{L}_{\mathrm{S}_1}]$ ou $d \in [\mathrm{L}_{\mathrm{S}_2} ; \mathrm{L}_{\mathrm{C}_2}]$ alors le service de maintenance prélève immédiatement un autre échantillon (procédure d'alerte) et refait les mesures et calculs.

Une machine est en cours de cycle. Un prélèvement de 20 axes conduit aux mesures suivantes :

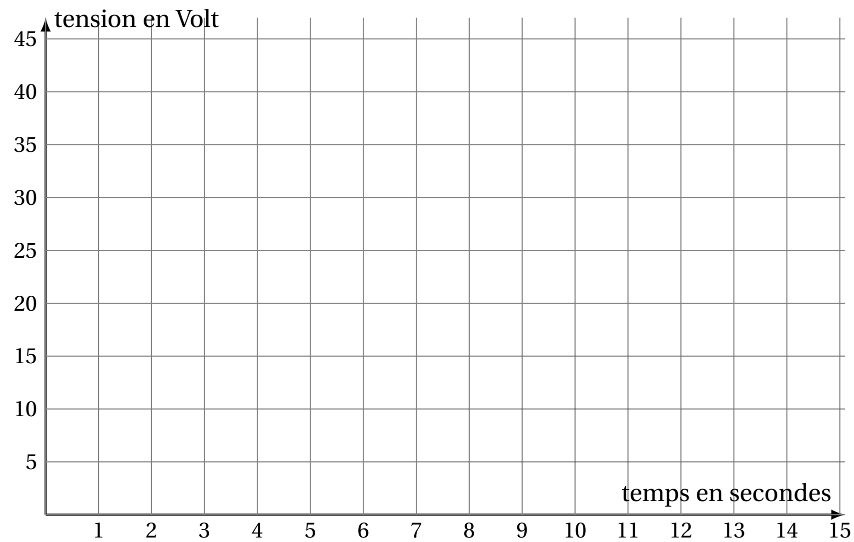
Diamètre en mm	[15,09 ; 15,11]	[15,11 ; 15,13]	[15,13 ; 15,15]	[15,15 ; 15,17]	[15,17 ; 15,19]
Effectif	1	2	3	4	3
Diamètre en mm	[15,19 ; 15,21]	[15,21 ; 15,23]	[15,23 ; 15,25]	[15,25 ; 15,27]	[15,27 ; 15,29]
Effectif	2	2	1	1	1

a. En utilisant le milieu de chacun des intervalles, calculer le diamètre moyen des 20 axes prélevés.

b. Quelle décision prend le service de maintenance ? Expliquer.

DOCUMENT RÉPONSE à rendre avec la copie

EXERCICE 1 - PARTIE D - Question 2 :



EXERCICE 1 - PARTIE D - Question 3. a. :

t	$-\infty$	0	3	7 $\quad +\infty$
$10\mathscr{U}(t)$				
$30\mathscr{U}(t-3)$				
$-20\mathscr{U}(t-7)$				
$e(t)$				