

∞ Corrigé du BTS Métropole 18 mai 2026 ∞ Groupement B1

Exercice 1

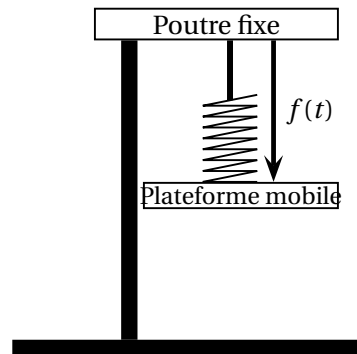
10 points

Le mouvement vertical d'une plateforme mobile est modélisé par une fonction f .

$f(t)$ désigne la distance, en centimètres, entre la plateforme mobile et la poutre fixe.

t désigne le temps, en secondes, écoulé depuis le début de l'expérience.

On admet que la fonction f est définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.



Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + 6y' + 9y = 18$, où y est une fonction inconnue de la variable t , définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

On considère l'équation différentielle homogène associée (E_0) : $y'' + 6y' + 9y = 0$.

1. On résout dans $\mathbf{R}$ l'équation $r^2 + 6r + 9 = 0$.

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \iff (r + 3)^2 = 0 \iff r + 3 = 0 \iff r = -3$$

2. L'équation caractéristique admet une seule solution réelle $r_0 = -3$, donc les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont de la forme $y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$, c'est-à-dire $y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-3t}$.

3. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 2$

$g''(t) + 6g'(t) + 9g(t) = 0 + 0 + 9 \times 2 = 18$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

4. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions f définies par $f(t) = 2 + (C_1 + C_2 t) e^{-3t}$.

5. On sait que la fonction f vérifie les conditions initiales $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$.

$$\bullet f(0) = 20 \iff 2 + (C_1 + C_2 \times 0) e^0 = 20 \iff 2 + C_1 = 20 \iff C_1 = 18$$

$$\text{Donc } f(t) = 2 + (18 + C_2 t) e^{-3t}.$$

$$\bullet f(t) = 2 + (18 + C_2 t) e^{-3t} \text{ donc}$$

$$f'(t) = 0 + (0 + C_2) e^{-3t} + (18 + C_2 t) \times (-3) e^{-3t} = (C_2 - 54 - 3C_2 t) e^{-3t}$$

$$\bullet f'(0) = -10 \iff (C_2 - 54 - 3C_2 \times 0) e^0 = -10 \iff C_2 - 54 = -10 \iff C_2 = 44$$

$$\text{Donc } f(t) = 2 + (18 + 44t) e^{-3t}.$$

Partie B - Étude d'une fonction

1. La distance entre la plateforme mobile et la poutre fixe 1 seconde après le début de l'expérience est, en centimètres, égale à :

$$f(1) = 2 + (18 + 44 \times 1) e^{-3 \times 1} = 2 + 62 e^{-3} \approx 5,1.$$

2. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2$.

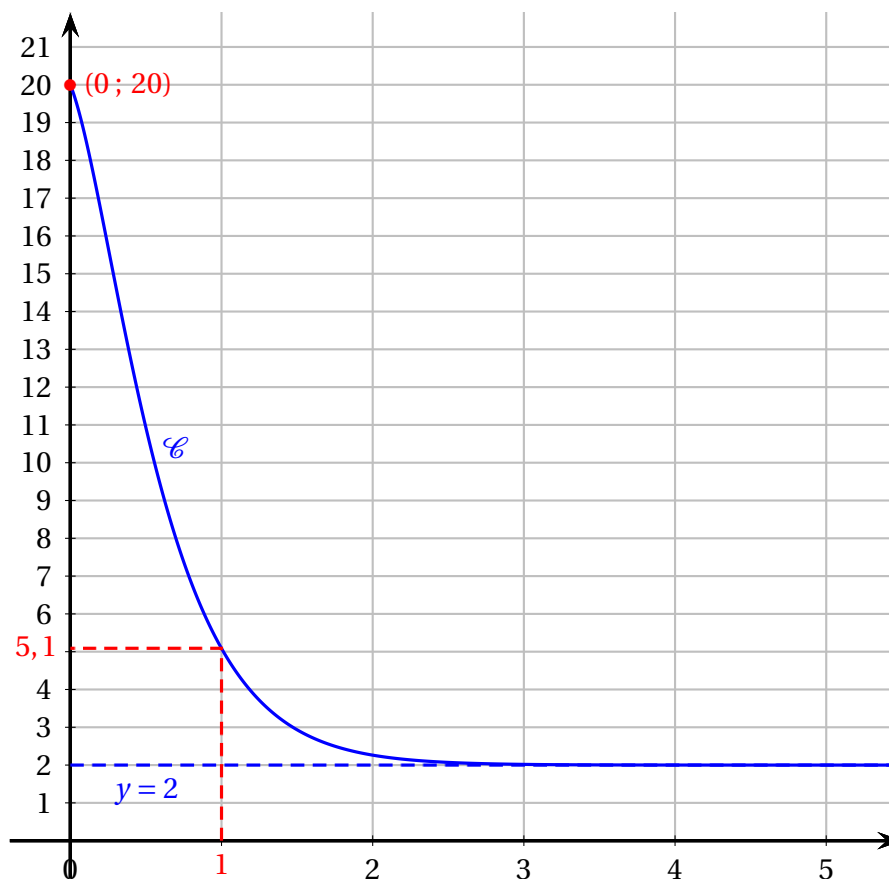
On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a : $f'(t) = (-10 - 132t) e^{-3t}$.

- Pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $-132t \leq 0$ donc $-10 - 132t < 0$.
- Pour tout réel t , on sait que $e^{-3t} > 0$.

Donc pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $f'(t) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante, ce qui veut dire que la plateforme mobile va se diriger vers la poutre fixe et pas vers le sol.

4. Schéma



EXERCICE 2**10 points**

Une collectivité équipe un immeuble avec des chauffe-eau.

Partie A - Probabilités conditionnelles

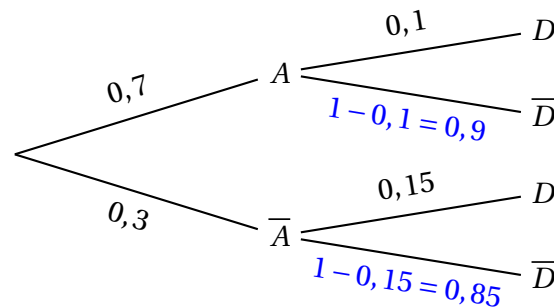
On dispose des informations suivantes :

- 70 % des chauffe-eau sont de la marque A. Parmi eux, 10 % sont défectueux.
- 30 % des chauffe-eau sont de la marque B. Parmi eux, 15 % sont défectueux.

On choisit un chauffe-eau au hasard et on note les évènements :

- A : « le chauffe-eau est de la marque A ».
- D : « le chauffe-eau est défectueux ».

1. On réalise un arbre pondéré décrivant la situation.



2. La probabilité que le chauffe-eau soit de la marque A et soit défectueux est :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,7 \times 0,1 = 0,07.$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap D) = 0,07 + 0,3 \times 0,15 = 0,07 + 0,045 = 0,115.$$

4. On sait que le chauffe-eau est défectueux. Le réparateur déclare : « Le plus probable est qu'il s'agisse d'un chauffe-eau de la marque B car ils sont moins fiables. »

Il s'agit donc de comparer $P_D(A)$ et $P_D(\bar{A})$.

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,07}{0,115} \text{ et } P_D(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,045}{0,115}$$

$0,07 > 0,045$ donc $P_D(A) > P_D(\bar{A})$ donc il est plus probable que le chauffe-eau défectueux soit de la marque A. Le réparateur a tort.

Partie B - Loi binomiale

On s'intéresse à la température de l'eau d'un chauffe-eau.

Chaque minute la température est contrôlée. Si la température n'est pas conforme, une alerte est déclenchée.

La probabilité pour que, durant un intervalle d'une minute, une alerte soit déclenchée est égale à 0,013. Cette probabilité est identique quelle que soit l'intervalle d'une minute considéré.

On observe le chauffe-eau sur une journée, soit 24 heures, et on note X le nombre d'alertes déclenchées durant ces 24 heures.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

- La probabilité pour que, durant un intervalle d'une minute, une alerte soit déclenchée est égale à 0,013 donc $p = 0,013$.
- On observe le chauffe-eau sur une journée, soit 24 heures. Il y a 60 minutes dans une heure et $24 \times 60 = 1\,440$. Il y a donc 1 440 observations donc $n = 1\,440$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 1\,440$ et $p = 0,013$.

2. $E(X) = np = 1\,440 \times 0,013 = 18,72$.

Cela veut dire que sur une journée il y aura en moyenne environ 19 alertes.

3. La probabilité, arrondie au millièm, qu'il y ait exactement 20 alertes déclenchées durant la journée est :

$$P(X = 20) = \binom{1\,440}{20} \times 0,013^{20} \times (1 - 0,013)^{1\,440-20} \approx 0,086$$

4. On décide d'approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 18,72$.

a. On sait qu'une loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée, sous certaines conditions, par une loi de Poisson de paramètre $n \times p$.

Ici $n \times p = 18,72$ donc c'est cohérent d'approcher la loi binomiale X par la loi de Poisson Y de paramètre $\lambda = 18,72$.

b. À la calculatrice, on trouve : $P(Y < 15) = P(Y \leq 14) \approx 0,165$, valeur arrondie au millièm.

Partie C - Test d'hypothèse

Afin de pouvoir être aisément installé, un chauffe-eau ne doit pas être trop lourd.

Le constructeur assure que la masse moyenne des chauffe-eau est égale à 55 kg.

Un technicien a l'intuition que la masse moyenne est en réalité supérieure à 55 kg.

Il souhaite donc mettre en place un test unilatéral à partir d'un échantillon aléatoire de 36 chauffe-eau.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque chauffe-eau choisi au hasard dans la production, associe sa masse exprimée en kilogramme.

La variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 2,4$ kg.

On désigne par $\bar{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 36 chauffe-eau prélevé dans la production, associe la moyenne des masses des chauffe-eau de cet échantillon.

La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 55$.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu > 55$.

Sous l'hypothèse nulle H_0 , on admet que la variable aléatoire $\bar{Z}$ suit une loi normale de moyenne 55 et d'écart-type $\frac{2,4}{\sqrt{36}}$

1. Certaines calculatrices donnent directement la valeur du réel a tel que $P(\bar{Z} < a) = 0,95$; elles donnent $a \approx 55,658$, d'où on déduit que $h \approx 0,658$.

Pour les autres calculatrices, on passe par la loi normale centrée réduite.

On sait que si la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ , alors la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Sous hypothèse nulle H_0 , la variable aléatoire $\bar{Z}$ suit la loi normale de moyenne $\mu = 55$ et d'écart-type $\sigma = \frac{2,4}{\sqrt{36}} = \frac{2,4}{6} = 0,4$, donc la variable aléatoire $W = \frac{\bar{Z} - 55}{0,4}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\bar{Z} < 55 + h \iff \bar{Z} - 55 < h \iff \frac{\bar{Z} - 55}{0,4} < \frac{h}{0,4} \iff W < \frac{h}{0,4}$$

On cherche donc le nombre b tel que $P(W < b) = 0,95$, sachant que W suit la loi normale centrée réduite.

La calculatrice donne $b \approx 1,644854$.

Donc $\frac{h}{0,4} = 1,644854$ et donc $h \approx 0,658$.

2. On énonce la règle de décision du test :

« Si la moyenne de l'échantillon étudié est inférieure à 55,658, on acceptera l'hypothèse H_0 au seuil de 5 %, c'est-à-dire qu'on pourra considérer que la masse moyenne des chauffe-eau est de 55 kg. Sinon, on rejette l'hypothèse H_0 . »

3. La masse totale des 36 chauffe-eau de l'échantillon testé est égale à 2 016 kg.

$\frac{2016}{36} = 56$ donc la masse moyenne d'un chauffe-eau est de 56 kg.

$56 \notin [0; 55,658]$ donc on peut rejeter l'hypothèse H_0 avec un risque d'erreur de 5 %.

On peut donc confirmer l'intuition du technicien.