BTS Groupement B3 – Session 2026

Électrotechnique

Épreuve de mathématiques

Durée : 2 heures **Coefficient : 2**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

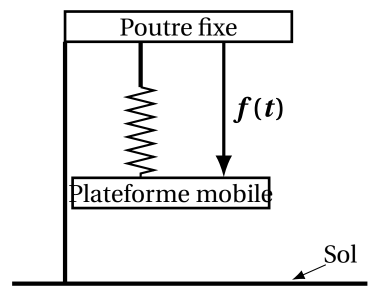
Exercice 1 — 10 points

Le mouvement vertical d'une plateforme mobile est modélisé par une fonction f.

$f(t)$ désigne la distance, en centimètres, entre la plateforme mobile et la poutre fixe.

t désigne le temps, en secondes, écoulé depuis le début de l'expérience.

On admet que la fonction f est définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.



Partie A – Résolution d'une équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E)\ :\quad y'' + 6y' + 9y = 18,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

On considère l'équation différentielle homogène associée

$$(E_0)\ :\ y'' + 6y' + 9y = 0.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 6r + 9 = 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On fournit les formules suivantes :

	Équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	Équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	Une solution réelle r_0	$y(t) = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{r_0 t}$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$	$y(t) = [C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)]\,\mathrm{e}^{\alpha t}$

3. Vérifier que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 2$ est solution de l'équation différentielle (E).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
5. On sait que la fonction f vérifie les conditions initiales $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$.
   Montrer que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par

$$f(t) = 2 + (18 + 44t)\,\mathrm{e}^{-3t}.$$

Partie B – Étude d'une fonction

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par

$$f(t) = 2 + (18 + 44t)\,\mathrm{e}^{-3t}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la distance entre la plateforme mobile et la poutre fixe 1 seconde après le début de l'expérience. On arrondira au millimètre.
2. On admet que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 2$.
   La courbe $\mathscr{C}$ possède-t-elle une asymptote ? Si oui, donner son équation.
3. On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a

$$f'(t) = (-10 - 132t)\,\mathrm{e}^{-3t}.$$

   Expliquer pourquoi on peut en déduire que la plateforme mobile se dirige vers la poutre et non pas vers le sol.
4. Réaliser un schéma donnant sommairement l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ et sur lesquels les résultats obtenus aux questions **2** et **3** apparaîtront.

Exercice 2 10 points

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

On considère une fonction E. On dispose des informations suivantes :

- la fonction E est paire ;
- la fonction E est périodique de période $T = 0{,}020$;
- on a $E(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leqslant t < 0{,}005\ ; \\ 0 & \text{si } 0{,}005 \leqslant t < 0{,}010. \end{cases}$

1. Justifier que $E(-0{,}002) = 4$.
Justifier que $E(0{,}006 + 10 \times 0{,}020) = 0$.

2. Représenter, sur la copie, un schéma donnant l'allure de la courbe de la fonction E sur un intervalle dont la longueur est au moins égale à trois périodes.

3. On note ω la pulsation de la fonction E.
Montrer que $\omega = 100\pi$.

4. Déterminer la moyenne a_0 de la fonction E.

5. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a $b_n = 0$.

6. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$a_n = \frac{8}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

a. On considère un entier naturel n non nul.
Montrer que, si n est pair, on a $a_n = 0$.

b. Montrer que $a_1 = \dfrac{8}{\pi}$.

7. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs exactes.

n	0	1	2	3	4	5
a_n		$\frac{8}{\pi}$				
b_n						

8. Écrire l'expression de la série de Fourier partielle $s_5(t)$.

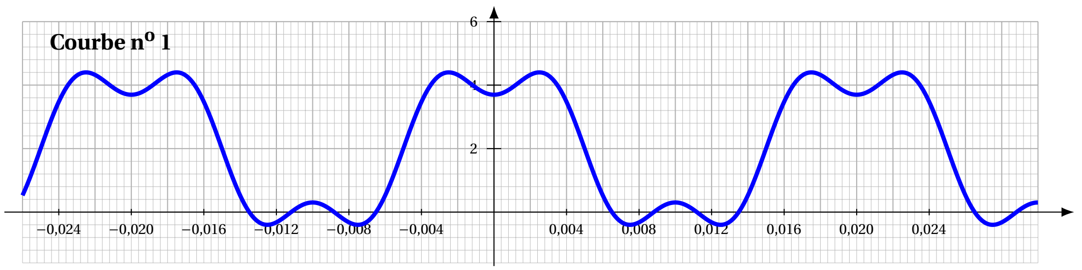
9. La fonction E correspond à un signal de tension $E(t)$. Le temps t est exprimé en secondes.

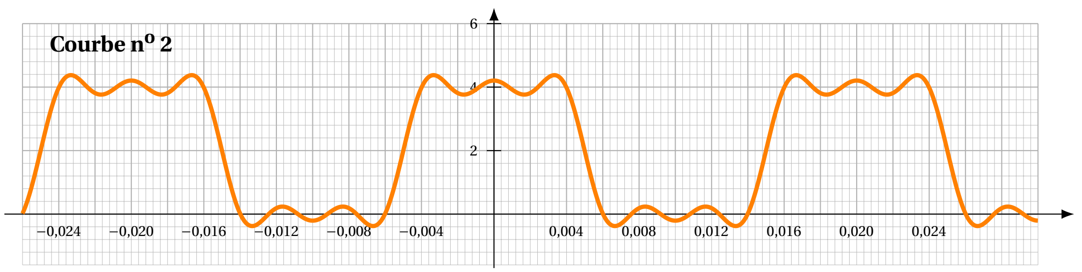
   a. Justifier que la fréquence f du signal $E(t)$ est égale à 50 Hz.

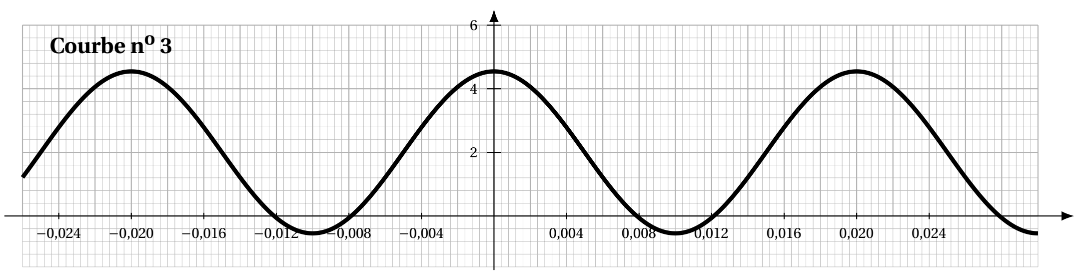
   b. Le signal $E(t)$ est traité par un filtre passe-bas qui supprime toutes les harmoniques dont la fréquence est supérieure à 80 Hz.

   Ainsi, le signal de sortie $F(t)$ est identique au signal d'entrée $E(t)$, privé des harmoniques dont la fréquence est supérieure à 80 Hz.

   Choisir, en justifiant, la représentation graphique correspondant au signal de sortie $F(t)$.







⋆ ⋆ ⋆

FORMULAIRE sur les séries de Fourier.

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\big).$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t,\ n \geqslant 1\,; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t,\ n \geqslant 1.$$