Brevet de technicien supérieur 9 mai 2017
Conception de produits industriels

Exercice 1 **5 points**

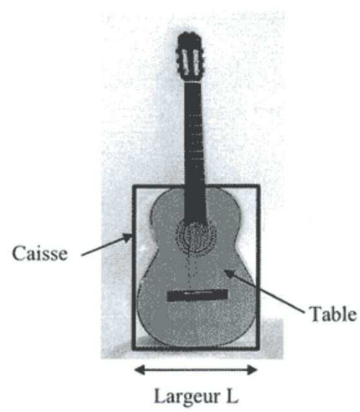
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on définit les point A, B et C par leurs coordonnées

$$A(3\,;\,0\,;\,0)\ B(0\,;\,-6\,;\,0)\ \text{et}\ C(0\,;\,2\,;\,4)$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   c. En déduire une valeur arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. **a.** Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.

Exercice 2 **9 points**

Dans un souci de rentabilité, un fabricant de guitare classique souhaite effectuer la découpe de certaine pièces de bois de façon automatique par une machine à commande numérique.
La face avant de la caisse, appelée table est découpée dans une plaque de bois plane.
L'objectif de cet exercice est d'obtenir le contour de cette table à l'échelle 1/5, à l'aide de deux courbes de Bézier $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On note L la largeur maximale de la table, telle qu'indiquée sur le schéma.



La courbe $\mathscr{C}_1$ tracée sur le document réponse 1 à rendre avec la copie est la courbe de Bézier associée aux quatre points de contrôle successifs :

$$A(0\,;\,4)\,;\,B(-4\,;\,4)\,;\,C(-2\,;\,1)\ \text{et}\ D(-2\,;\,0).$$

La courbe $\mathscr{C}_2$ (non tracée) est la courbe de Bézier associée aux quatre points de contrôle successifs :

$$D(-2\,;\,0)\,;\,E(-2\,;\,-2)\,;\,F(-6\,;\,-7)\ \text{et}\ G(0\,;\,-7).$$

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes. La partie* D *utilise la partie* C.

Partie A - Raccordement des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$

On admet que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se raccordent au point D.
Prouver que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont même tangente en ce point. Tracer cette tangente sur le document réponse 1 à rendre avec la copie.

Partie B - Construction d'un point de la courbe $\mathscr{C}_2$

Pour chaque valeur t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'algorithme de construction par barycentre successifs, appelé algorithme de De Casteljau, permet de construire le point $M_2(t)$ de paramètre t de la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$.

Utiliser cet algorithme pour la valeur $t = \frac{3}{4}$ et placer sur **le document réponse 1 à rendre avec la copie** le point $M_2\left(\frac{3}{4}\right)$ de $\mathscr{C}_2$.
Laisser les traits de construction apparents.

Partie C - Tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$

La courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ associée aux quatre points de contrôle successifs D$(-2\,;\,0)$; E$(-2\,;\,-2)$, F$(-6\,;\,-7)$ et G$(O\,;\,-7)$ est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_2(t)} = B_0(t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + B_1(t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + B_2(t)\overrightarrow{\mathrm{OF}} + B_3(t)\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

où $t \in [0\,;\,1]$ et les fonctions $B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein de degré 3 donnés par :

$$B_i(t) = \begin{pmatrix}3\\i\end{pmatrix} t^i(1-t)^{3-i}.$$

On rappelle que les nombres $\binom{3}{i}$ sont des coefficients binomiaux qui peuvent être obtenus à la calculatrice ou par la formule $\binom{3}{i} = \dfrac{3!}{i!(3-i)!}$.

1. Montrer que $B_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$.
   Dans la suite, on admet que $B_0(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$, $B_2(t) = -3t^3 + 3t^2$ et $B_3(t) = t^3$.
2. **a.** La représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{C}_2$ est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& f_2(t)\\ y &=& g_2(t)\end{array}\right.$.

   Montrer que $f_2(t) = 14t^3 - 12t^2 - 2$.
   On admet que $g_2(t) = 8t^3 - 9t^2 - 6t$.

   b. Étudier les variations de la fonction f_2 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et compléter le tableau des variations conjointes de f_2 et g_2 situé sur **le document réponse 2 à rendre avec la copie**. On arrondira si nécessaire [es valeurs au dixième.

   Les résultats concernant la fonction g_2 donnés dans le tableau n'ont pas à être justifiés et peuvent être utilisés par la suite.
3. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point $M_2\left(\frac{4}{7}\right)$, puis au point $M_2(1)$.
4. **a.** Tracer sur **le document réponse 1 à rendre avec la copie** les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point $M_2\left(\frac{4}{7}\right)$ et $M_2(1)$.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur **le document réponse 1 à rendre avec la copie**.

Partie D - Fin de la construction

1. Tracer les courbes $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$, respectivement symétriques des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ par rapport à l'axe de ordonnées.
2. Donner une représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{C}_4$.
3. On admet que le graphique du document réponse 1 est à l'échelle 1/5 et que l'unité graphique est de 1 cm. Quelle est la largeur maximale L de la table de la guitare ?

Exercice 3 **6 points**

Un formulaire est fourni en fin d'exercice

Contexte : Une entreprise fabrique par moulage des paraboles pour réception satellitaire en matériau composite. Ce matériau est disposé dans un moule à une température de 140° C (degrés Celsius), puis pressé.
On pose $t = 0$ à l'instant où la parabole est retirée du moule. Elle a alors une température de 140 ° C.
On la dépose à l'air libre à la température ambiante de 20° C afin qu'elle refroidisse.
On note $f(t)$ la température de la parabole, en degrés Celsius à l'instant t, exprimée en secondes.
D'après la loi de refroidissement de Newton, la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ d'expression $f(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'(t) + 0,004y(t) = 0,08$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) :
$y'(t) + 0,004y(t) = 0$.
2. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E) :
$y'(t) + 0,004y' t) = 0,08$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. On rappelle que $f(0) = 140$. En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t \in [0~;~+\infty[$.

Partie B - Étude d'une fonction

Dans cette partie, on admet que

$$f(t) = 120\mathrm{e}^{-0,0044t} + 20 \text{ pour } t \in [0~;~+\infty[.$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.
3. Au cours du refroidissement. il arrive que la parabole doive subir des rectifications et des contrôles.
Ceux-ci ne peuvent être effectués que lorsque la température de la parabole est inférieure à 30 ° C.
   a. Justifier qu'il existe un instant t_1 à partir duquel la température se maintient en dessous de 30° C.
   b. Pour déterminer une valeur possible pour t_1 on utilise l'algorithme suivant :

   Variable : t entier
   Traitement :
   t prend la valeur 0
   Tant que $f(t) > 30$
   $\quad$ t prend la valeur $t + 1$
   Fin du tant que
   Afficher t

   Justifier que l'algorithme s'arrête.
   c. En utilisant la méthode de votre choix, déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme.

FORMULAIRE

Équation différentielle d'ordre 1

Les solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) : $ay'(t) + by(t) = 0$ sont les fonctions y définies sur un intervalle I par :

$$y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \text{ avec } k \text{ constante réelle.}$$

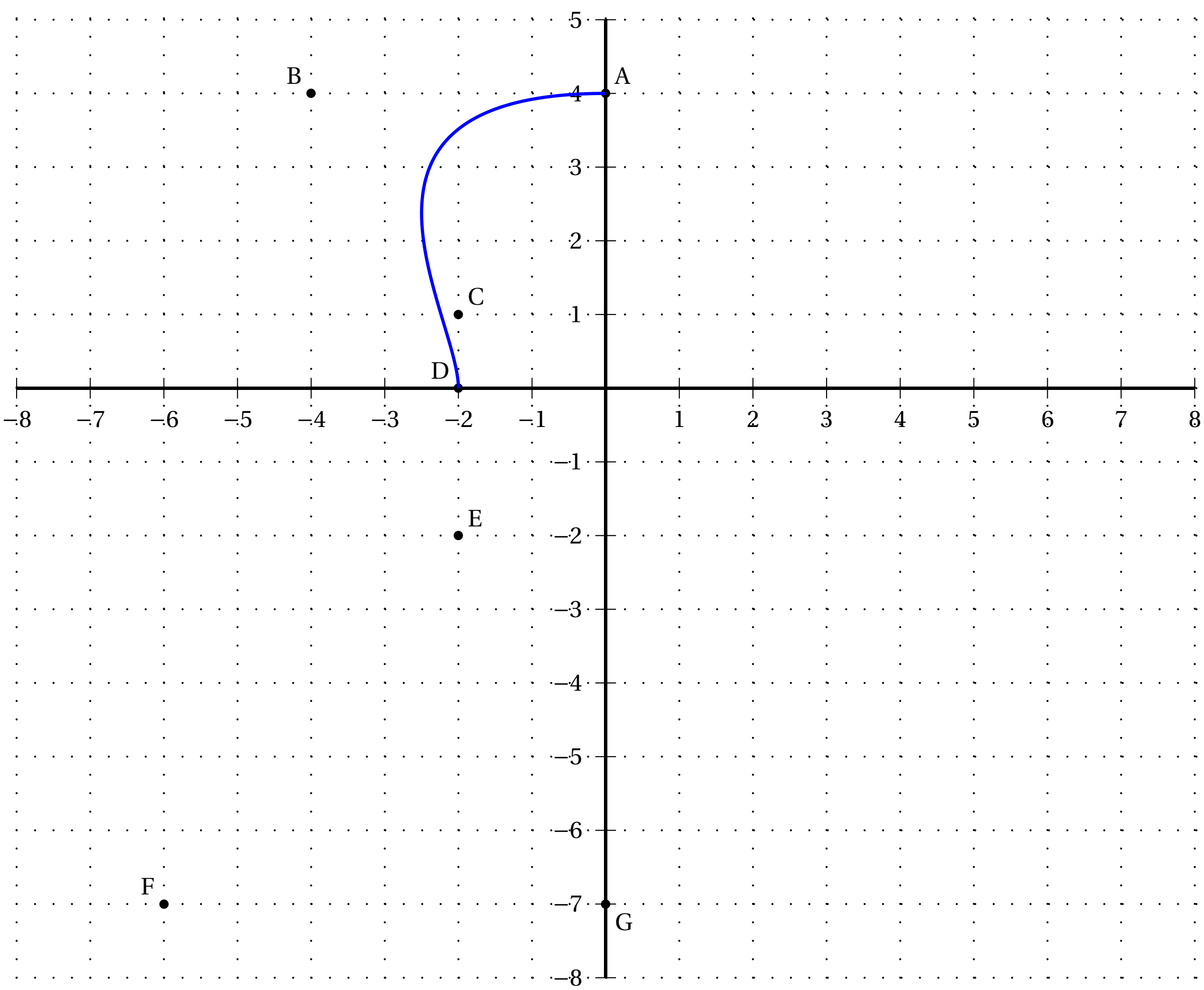
Formule de dérivation

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I La fonction e^{t} est dérivable sur I et on a :

$$\left(\mathrm{e}^{u}\right)' = u'\mathrm{e}^{u}$$

DOCUMENT RÉPONSE 1

GRAPHIQUE : exercice 2



DOCUMENT RÉPONSE 2

Tableau des variations conjointes de f_2 et g_2 (Exercice 2 partie C)

t	0		$\frac{4}{7}$		1
$f_2'(t)$					
$f_2(t)$					
$g_2(t)$	0	$\searrow$	$-4,9$	$\searrow$	-7
$g_2'(t)$	-6		$-$		0