Brevet de technicien supérieur 9 mai 2017
Groupement C

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1 **11 points**

En sylviculture (technique d'exploitation des forêts), le cubage des arbres est une activité essentielle qui consiste à chiffrer régulièrement des volumes de bois, qu'ils soient abattus ou encore sur pied.

Afin d'éviter toute contestation entre les différents acteurs du secteur, exploitants et négociants, le cubage des bois est régi par les normes AFNOR NF B 53 – 020 et NF B 53 – 017.

En fonction de leur destination, on distingue plusieurs types de bois, parmi lesquels :

— Le bois d'œuvre (BO), partie du tronc dont le diamètre est supérieur à 20 cm, destinée, en fonction de l'essence, à la construction (charpente, bardage), la menuiserie ou l'ébénisterie.

— Le bois fort (BF), partie de l'arbre (tronc et branches) dont le diamètre est supérieur à 7 cm.

Le bois fort est donc le bois d'œuvre auquel s'ajoute toute une partie de l'arbre valorisable dans l'industrie (trituration, papeterie, chauffage, ...).
On s'intéressera, dans la suite, uniquement à l'étude du bois fort.

Le but de l'exercice est d'anticiper la croissance d'un plant de Douglas (une des deux essences d'arbre les plus cultivées en France pour ses remarquables propriétés mécaniques).
Les arbres étudiés dans cet exercice ont dix ans ou plus.

Partie 1 : Modèle statistique

Le tableau suivant donne le volume de bois fort, en m^3, d'un plant de Douglas, en fonction de son âge, exprimé en années :

t (en années)	10	20	30	50
$V\left(\text{en m}^3\right)$	0,09	0,19	0,51	2,11

Une première méthode pour anticiper la croissance de ce plant de Douglas consiste à étudier le coefficient $Q = \ln\left(\dfrac{7}{V} - 1\right)$.

1. Le tableau ci-dessous, donnant les valeurs de Q en fonction de t, est reproduit en annexe 1.

t (en années)	10	20	30	50
$V\left(\text{en m}^3\right)$	0,09	0,19	0,51	2,11
Q	4,34		2,54	

   Sur l'annexe 1, à rendre avec la copie, compléter ce tableau (arrondir à 10^{-2} près).

2. Représenter, dans le repère fourni en annexe 2, à rendre avec la copie, le nuage de points de la série statistique constituée des deux variables t et Q.

3. On s'intéresse à l'ajustement affine de Q en t par la méthode des moindres carrés.

   On obtient sur l'écran d'une calculatrice :

```
a =-0.088616
b =5.26297989
r =−0.9990631
r²=0.99812725
MSe=6.446E−03
y=ax+b
```

Donner une équation de la droite d'ajustement de Q en t par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 10^{-3} près).

4. Déterminer, en utilisant cet ajustement, la valeur prévisible de Q lorsque $t = 80$.

5. Quel volume de bois fort peut-on espérer tirer de ce plant de Douglas lorsqu'il aura 80 ans ?

Partie 2 : Modèle dynamique

Une autre approche de l'étude de la croissance d'un arbre, c'est-à-dire de son volume de bois fort, consiste à déterminer d'abord la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{V(t)}$ où $V(t)$ désigne le volume de bois fort pour un arbre âgé de t années.
Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux valeurs de t supérieures ou égales à 10.

Dans cette modélisation, on admet que cette fonction f est une solution particulière d'une équation différentielle de la forme : $y' + 0,088y = b$.
Dans cette équation, y désigne une fonction définie et dérivable sur $[10~;~+\infty[$.
$0,088$ est un coefficient adapté à tous les Douglas et b est un réel qui dépend de la qualité du plant étudié et des conditions de culture.

Dans toute la suite, on considère le plant de Douglas étudié dans la partie 1, dont le volume de bois fort est donné par le premier tableau de la partie 1.

1. L'utilisation d'un logiciel a permis de représenter les volumes de bois fort en fonction du temps t pour différents plants de Douglas, c'est-à-dire pour différentes valeurs du réel b.

Parmi les courbes données sur le graphique de l'annexe 3, l'une d'entre elles représente le volume V de bois fort du plant de Douglas étudié.

Expliquer pourquoi on peut choisir $0,012$ comme valeur de b pour ce plant de Douglas.

2. On appelle (E) l'équation différentielle :

$$y' + 0,088y = 0,012.$$

a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad y' + 0,088y = 0.$$

b. Démontrer que la fonction constante g, définie sur $[10~;~+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{0,012}{0,088}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

d. Calculer $f(10)$ puis déterminer la solution particulière f de cette équation (E) concernant le plant de Douglas étudié.

3. Dans cette question, on admet que le volume de bois fort du plant de Douglas étudié est défini par l'expression :

$$V(t) = \frac{1}{26,46\mathrm{e}^{-0,088t} + 0,14}$$

où t désigne le temps en années.

a. Quel volume de bois fort peut-on espérer de ce plant de Douglas quand il aura 80 ans ?

b. Expliquer pourquoi la courbe représentative de la fonction V admet une asymptote horizontale et en donner une équation.

c. Tracer cette asymptote sur le graphique donné en annexe 3, à rendre avec la copie, et compléter la courbe représentative de la fonction V.
L'étude des variations de la fonction V n'est pas attendue.

4. L'Office National des Forêts conseille aux sylviculteurs de commercialiser leurs Douglas lorsqu'ils ont atteint 85 % de la valeur limite du volume de bois fort.
À quel âge est-il conseillé de commercialiser le plant de Douglas étudié ?

Exercice 2 **9 points**

Partie 1 : Production

Dans le cadre de la fabrication d'une console de jeux, nommée XS5, une entreprise d'injection plastique est chargée de fabriquer les coques plastiques des manettes utilisées avec cette console XS5. Ces coques sont constituées de deux pièces, la demi-coque supérieure S et la demi-coque inférieure I, que l'on assemble lors du montage de la coque.
Lors de l'injection du plastique dans le moule, il arrive que la pression ne soit pas suffisante et que la pièce, bien que d'aspect conforme, ne soit pas de densité suffisante pour garantir certaines propriétés de résistance.
Une demi-coque supérieure S est jugée conforme lorsque sa masse est supérieure à 62 grammes.

On considère la variable aléatoire X qui, à toute demi-coque supérieure S prélevée au hasard dans la production, associe sa masse en grammes. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m = 63$ et d'écart-type $\sigma = 0,45$.
Quelle est la probabilité qu'une demi-coque supérieure S prise au hasard dans la production soit jugée conforme ?

Partie 2 : Contrôle de la conformité

Toutes les semaines, le responsable de la production effectue un test pour contrôler si la presse est toujours réglée correctement. Un dérèglement de la presse pourrait, en effet, conduire à une augmentation de la proportion de demi-coques supérieures S non conformes.
Pour cela, on construit un test d'hypothèse unilatéral pour savoir si, au seuil de 5 %, on doit considérer que, la presse s'étant déréglée, la masse des demi-coques supérieures S a diminué.
Soit $\overline{X}$, la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 demi-coques supérieures S prélevées au hasard dans la production, associe sa masse moyenne. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler la constitution de l'échantillon à un tirage avec remise.
On admet que $\overline{X}$ suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type $\sigma = 0,045$.

1. On choisit l'hypothèse alternative Hl : m < 63. Donner l'hypothèse nulle Ho.

2. Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. Sous cette hypothèse nulle, dans ce type de test, la région de rejet est :

a. $]-\infty\ ;\ 62,926]$

b. $[62,926\ ;\ +\infty[$

c. $]-\infty\ ;\ 62,912] \cup [63,089\ ;\ +\infty[$

3. Énoncer la règle de décision du test.

4. On prélève dans la production un échantillon de 100 demi-coques supérieures S. La masse de cet échantillon est 6 294 grammes.

   Peut-on, au seuil de 5 %, considérer que la masse moyenne des demi-coques supérieures S a baissé ?

5. Si ce test unilatéral avait été réalisé au seuil de 1 %, déterminer quelle aurait été la région de rejet.

Partie 3 : Assemblage des manettes

Lors de la réalisation de la manette, on assemble une demi-coque supérieure S et une demi-coque inférieure I.
On admet que 1,3 % des demi-coques supérieures S et 2 % des demi-coques inférieures I ne sont pas conformes. Les choix des pièces à assembler sont indépendants.

1. Une manette est défectueuse lorsqu'au moins une des deux demi-coques qui la composent est non conforme.

   Démontrer que la probabilité, arrondie à 10^{-4}, qu'une manette soit défectueuse est 0,032 7.

2. Certaines manettes sont vendues avec les consoles, les autres sont emballées individuellement et commercialisées auprès des distributeurs par lots de 50. On rappelle que 3,27 % des manettes sont défectueuses.

   On choisit au hasard un lot de 50 manettes dans le stock. On admet que le stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 50 manettes.

   Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 manettes prélevé au hasard dans la production, associe le nombre de manettes défectueuses du lot.

   a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité qu'aucune manette du lot ne soit défectueuse.

   c. Calculer la probabilité $P(Y \geqslant 2)$ puis interpréter ce résultat.

   d. Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.
   Que représente ce nombre dans le cadre d'un grand nombre de lots ?

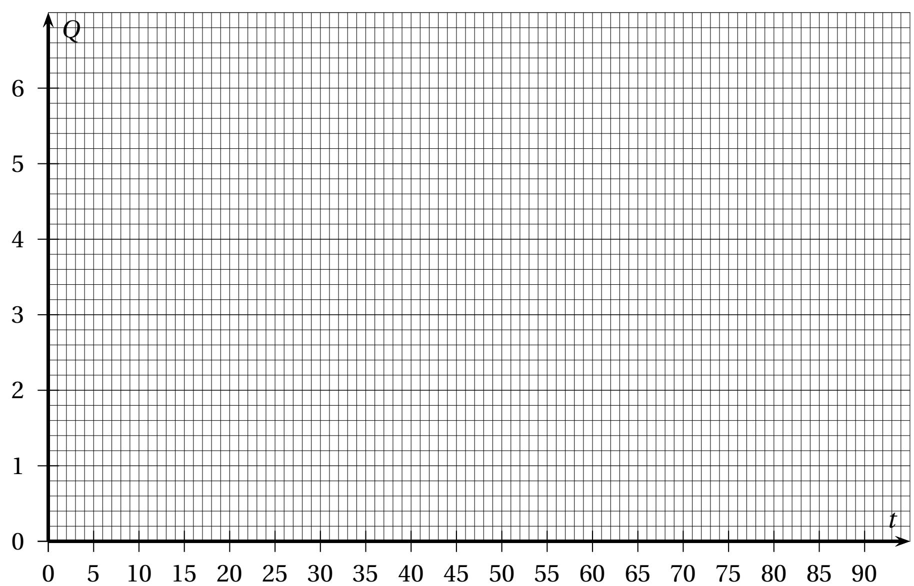
Annexe 1, à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 1, partie 1, question 1.

t (en années)	10	20	30	50
$V\left(\text{en m}^3\right)$	0,09	0,19	0,51	2,11
Q	4,34		2,54	

Annexe 2, à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 1, partie 1, question 2.



Annexe 3, à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 1, partie 2, questions 1. et 3. c.