BTS Métropole 18 mai 2026

groupement D1 [1]

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

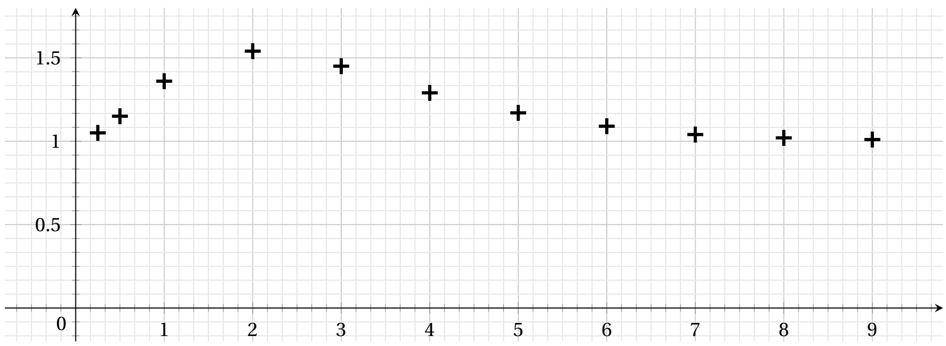
Exercice 1 — 11 points

La glycémie est le taux de glucose (sucre) contenu dans le sang. Elle est exprimée en gramme par litre de sang (g/L). Le taux normal de la glycémie (à jeun) est compris entre 0,7 g/L et 1,1 g/L de sang.
On étudie ici le processus d'élimination du glucose chez un adulte en bonne santé. À jeun, une injection de glucose est réalisée. On effectue plusieurs mesures de la glycémie. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant T qui donne la glycémie g (en g/L) à l'instant t désignant le temps écoulé, en heures, depuis l'injection :

t_i	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i	1,05	1,15	1,36	1,54	1,45	1,29	1,17	1,09	1,04	1,02	1,01

Les parties A, B, et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

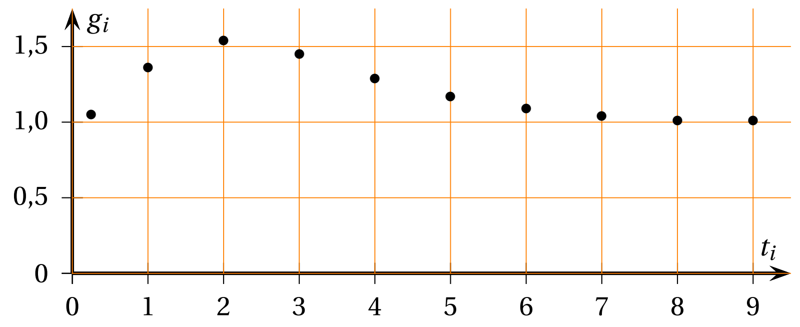


Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A Obtention d'une première modélisation (statistiques)

1. Le nuage de points correspondant au tableau de valeurs T a été représenté ci-dessous :

1. ANALYSES DE BIOLOGIE MÉDICALE, BIOANALYSES EN LABORATOIRE DE CONTRÔLE, BIOTECHNOLOGIES EN RECHERCHE ET EN PRODUCTION, EUROPLASTICS ET COMPOSITES, BIOQUALITÉ



À la vue de ce nuage, un ajustement affine apparaît-il réalisable ? Pourquoi ?

On effectue le changement de variable $y = \ln(g - 1)$.

2. On obtient alors le tableau T_1 ci-dessous :

t_i	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	y_1	y_2	$-1,022$	$-0,616$	$-0,799$	$-1,238$	$-1,772$	$-2,408$	$-3,219$	$-3,912$	$-4,605$

a. Sur la copie, donner les valeurs manquantes y_1 et y_2 (on arrondira au millième).

b. Donner la valeur, arrondie à 0,01, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique correspondant au tableau T_1.

3. On décide de supprimer les deux premières colonnes du tableau et de considérer la série statistique $(t\ ;\ y)$ donnée par le tableau suivant T_2 :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	$-1,022$	$-0,616$	$-0,799$	$-1,238$	$-1,772$	$-2,408$	$-3,219$	$-3,912$	$-4,605$

a. Donner la valeur, arrondie à 0,01, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique correspondant au tableau T_2.

b. Justifier que l'ajustement de la série statistique correspondant au tableau T_2 est de meilleure qualité que celui correspondant au tableau T_1.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $(t_i\ ;\ y_i)$ de ce tableau T_2 sous la forme $y = at + b$, les réels a et b étant arrondis au millième.

4. On considère le tableau suivant T_3, qui est le tableau T auquel les deux premières colonnes ont été supprimées :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i	1,36	1,54	1,45	1,29	1,17	1,09	1,04	1,02	1,01

a. Déduire de la question **3. c.** qu'une fonction g ajustant le nuage de points $(t\ ;\ g)$ de ce tableau T_3 en fonction du temps t a pour expression :

$g(t) = 1 + 1,41\mathrm{e}^{-0,5t}$.

b. Cette modélisation par la fonction g apparait-elle en accord avec les deux premières valeurs du tableau T ? Justifier la réponse.

Partie B Obtention d'une seconde modélisation (équation différentielle)

On admet ici que la glycémie (en g/L) de l'adulte étudié en fonction du temps t (en heures) peut être modélisée par une fonction g, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, qui est la solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 1 + 2t\mathrm{e}^{-t} \quad \text{telle que} \quad g(0) = 1.$$

1. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + y = 0$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 1 + t^2\mathrm{e}^{-t}$.

- **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
- **b.** En déduire que la fonction f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3.
- **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle (E).
- **b.** Déterminer alors une expression de la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $g(0) = 1$.

Exercice 2 — 9 points

Une entreprise fabrique des pipettes destinées à être utilisées en laboratoire. Le cahier des charges impose à une pipette d'avoir un diamètre interne d et une longueur L conformes aux exigences des utilisateurs. La pipette est alors conforme. Sinon, elle est considérée comme défectueuse.

Les parties A, B, et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

L'entreprise met au point un nouveau contrôle automatisé qui vise à déterminer si une pipette est conforme ou défectueuse. Toute pipette conforme devrait être acceptée au contrôle; toute pipette défectueuse devrait y être refusée. Toutefois :

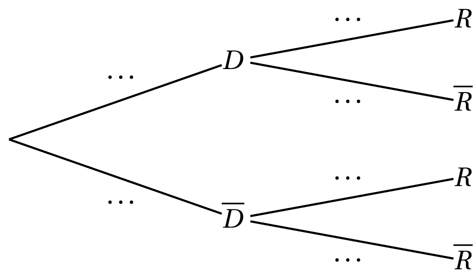
- 96 % des pipettes défectueuses sont refusées au contrôle;
- 99 % des pipettes conformes sont acceptées au contrôle.

L'entreprise décide d'utiliser ce nouveau contrôle sur un lot comprenant un très grand nombre de pipettes, tout en sachant que 3 % des pipettes du lot sont défectueuses. Une pipette est prélevée dans ce lot. On considère alors les évènements :

- D : « la pipette est défectueuse »;
- R : « la pipette est refusée au contrôle ».

On note respectivement $\overline{R}$ et $\overline{D}$ les évènements contraires des évènements R et D.

1. Recopier, sur la copie, l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Montrer que la probabilité de l'évènement R est égale à 0,038 5.

3. La pipette est refusée au contrôle. Quelle est alors la probabilité que la pipette soit effectivement défectueuse ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

4. Dans ce contexte de contrôle de conformité, il est important pour l'entreprise de « maîtriser le risque » qu'une pipette défectueuse soit acceptée au contrôle. Dans ce cadre, est-il plus pertinent de connaître $\mathrm{P}_D\left(\overline{R}\right)$ ou $\mathrm{P}_R\left(\overline{D}\right)$? Justifier.

Partie B

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Dans cette partie, on s'intéresse à la longueur L des pipettes fabriquées. La probabilité qu'une pipette prélevée au hasard ait un défaut de longueur est égale à 0,02.

La production est suffisamment importante pour que tout prélèvement au hasard de 550 pipettes dans la production puisse être assimilé à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 550 pipettes, associe le nombre de pipettes ayant un défaut de longueur.

1. **a.** Quelle loi suit la variable aléatoire X ? On justifiera la réponse et on donnera les paramètres de la loi.

b. Déterminer le nombre moyen de pipettes avec un défaut de longueur dans un échantillon de 550 pipettes prélevées au hasard.

c. On prélève au hasard 550 pipettes dans la production. Déterminer la probabilité de l'évènement : « le prélèvement contient exactement 10 pipettes ayant un défaut ».

On admet que la variable aléatoire X peut être approximée par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale.

2. Justifier que l'on peut prendre pour paramètres de cette loi normale : $m = 11$ et $\sigma = 3{,}283$.

3. **a.** Expliquer pourquoi la probabilité p ne peut pas être déterminée en calculant $P(Y = 10)$.

b. On admet qu'une valeur cohérente de p est donnée par la probabilité $P(9{,}5 \leqslant Y \leqslant 10{,}5)$.

Déterminer la valeur de la probabilité $P(9{,}5 \leqslant Y \leqslant 10{,}5)$.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre interne des pipettes fabriquées. Afin de contrôler si la moyenne m des diamètres internes de l'ensemble des pipettes fabriquées est de 1 mm, on se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 %.

On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 200 pipettes prélevées dans la production de l'entreprise, associe la moyenne des diamètres des 200 pipettes. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler un tel prélèvement de 200 pipettes à un tirage aléatoire avec remise.
On considère :

- l'hypothèse nulle est : « $H_0 : m = 1$ » ;
- l'hypothèse alternative est : « $H_1 : m \neq 1$ »
- le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

On suppose que la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type égal à 0,031 8.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer une valeur approchée du nombre réel positif h tel que :

$$P(m-h \leqslant \overline{X} \leqslant m+h) = 0{,}95$$

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. On prélève au hasard 200 pipettes dans la production. Les mesures expérimentales ont permis d'obtenir le tableau suivant :

Diamètre interne en mm	**Nombres de pipettes**
[0,88 ; 0,90[	2
[0,90 ; 0,92[	5
[0,92 ; 0,94[	11
[0,94 ; 0,96[	12
[0,96 ; 0,98[	15
[0,98 ; 1,00[	65
[1,00 ; 1,02[	70
[1,02 ; 1,04[	10
[1,04 ; 1,06[	8
[1,06 ; 1,08[	2

Diamètre interne en mm	**Nombres de pipettes**
[0,88 ; 0,90[	2
[0,90 ; 0,92[	5
[0,92 ; 0,94[	11
[0,94 ; 0,96[	12
[0,96 ; 0,98[	15
[0,98 ; 1,00[	65
[1,00 ; 1,02[	70
[1,02 ; 1,04[	10
[1,04 ; 1,06[	8
[1,06 ; 1,08[	2

a. En utilisant les centres des intervalles, calculer une valeur approchée du diamètre interne moyen $\overline{d}$ d'une pipette de cet échantillon.

b. D'après les résultats de l'échantillon donné, peut-on accepter l'hypothèse « $H_0 : m = 1$ » ? Justifier.