

∞ BTS Groupement D2¹ – 16 mai 2025 ∞

Métropole – Antilles – Guyane – Polynésie

Durée : 2 heures

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.**

Exercice 1

11 points

La glycémie est le taux de glucose (sucre) contenu dans le sang. Elle est exprimée en gramme par litre de sang (g/L). Le taux normal de la glycémie (à jeun) est compris entre 0,7 g/L et 1,1 g/L de sang.

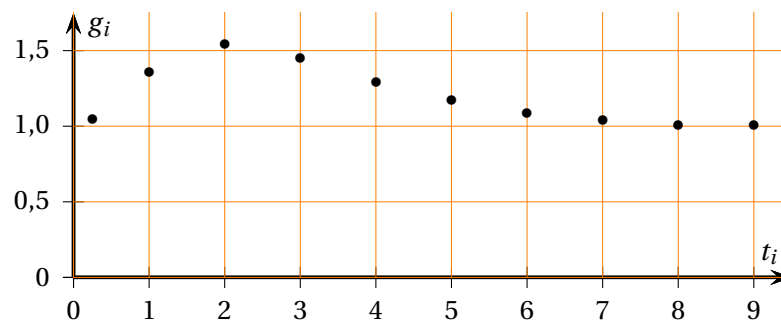
On étudie ici le processus d'élimination du glucose chez un adulte en bonne santé. À jeun, une injection de glucose est réalisée. On effectue plusieurs mesures de la glycémie. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant, T qui donne la glycémie g_i (en g/L) à l'instant t_i désignant le temps écoulé, en heures, depuis l'injection :

t_i	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i	1,05	1,15	1,36	1,54	1,45	1,29	1,17	1,09	1,04	1,02	1,01

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A – Obtention d'une première modélisation (statistiques)

1. Le nuage de points correspondant au tableau de valeurs T a été représenté ci-dessous :



À la vue de ce nuage, un ajustement affine apparaît-il réalisable? Pourquoi?

On effectue le changement de variable $y = \ln(g - 1)$.

On obtient alors le tableau T_1 ci-dessous :

t_i	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	y_1	y_2	-1,022	-0,616	-0,799	-1,238	-1,772	-2,408	-3,219	-3,912	-4,605

- Sur la copie, donner les valeurs manquantes y_1 et y_2 (on arrondira au millième).
 - Donner la valeur, arrondie à 0,01, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique correspondant au tableau T_1 .
2. On décide de supprimer les deux premières colonnes du tableau et de considérer la série statistique $(t ; y)$ donnée par le tableau suivant T_2 :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	-1,022	-0,616	-0,799	-1,238	-1,772	-2,408	-3,219	-3,912	-4,605

- Donner la valeur, arrondie à 0,01, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique correspondant au tableau T_2 .
 - Justifier que l'ajustement de la série statistique correspondant au tableau T_2 est de meilleure qualité que celui correspondant au tableau T_1 .
 - À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $(t_i ; y_i)$ de ce tableau T_2 sous la forme $y = at + b$, les réels a et b étant arrondis au millième.
3. On considère le tableau suivant T_3 , qui est le tableau T auquel les deux premières colonnes ont été supprimées :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i	1,36	1,54	1,45	1,29	1,17	1,09	1,04	1,02	1,01

- Déduire de la question 3. c. qu'une fonction g ajustant le nuage de points $(t_i ; g_i)$ de ce tableau T_3 en fonction du temps t a pour expression : $g(t) = 1 + 1,41e^{-0,5t}$.
- Cette modélisation par la fonction g apparaît-elle en accord avec les deux premières valeurs du tableau T ? Justifier la réponse.

Partie B – Étude d'une seconde modélisation

On admet ici que la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(t) = 1 + t^2 e^{-t}$$

modélise, en fonction du temps t exprimé en heures, la glycémie de l'adulte $g(t)$, exprimée en g/L. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction g a été tracée en **annexe**, qui est à rendre avec la copie.

- Un adulte à jeun est considéré en hyperglycémie quand sa glycémie est supérieure ou égale à 1,1 g/L.
En s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction g , donner une estimation de la plage horaire sur laquelle l'adulte étudié est en hyperglycémie.
Faire apparaître les traits de construction correspondants sur le graphique de l'annexe.

On admet que la vitesse instantanée à laquelle évolue la glycémie, exprimée en g/L par heure (g/L/h), à un temps donné t_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse t_0 .

2. En s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction g , indiquer si l'affirmation « la vitesse instantanée à laquelle évolue la glycémie est constante au cours du temps » est vraie ou fausse.

Justifier.

3. a. Par un raisonnement graphique, estimer la vitesse instantanée de variation de la glycémie au temps $t_0 = 6$ h. On détaillera le raisonnement et on fera apparaître les traits de construction correspondants sur le graphique de l'annexe.
b. Que devrait-on calculer à partir de la fonction g pour déterminer exactement la vitesse instantanée de variation de la glycémie au temps $t_0 = 6$ h? Le calcul n'est pas demandé.

4. On admet que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} = 0$.

Donner alors la limite de la fonction g en $+\infty$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. a. Vérifier que la dérivée de la fonction g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g'(t) = t(2-t)e^{-t}$.
En déduire le tableau de variations de la fonction g .
b. En déduire la valeur maximale de la glycémie (arrondie à 0,01 g/L) de l'adulte étudié et au bout de combien de temps après l'injection elle est atteinte.

6. Un adulte à jeun est considéré en hyperglycémie quand sa glycémie est supérieure ou égale à 1,1 g/L.
Sans justifier, indiquer ce que l'algorithme ci-contre permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

T prend la valeur 2
G prend la valeur $g(2)$
Tant que $G \geq 1$
 T prend la valeur $T + 1/60$
 G prend la valeur $g(T)$
Fin Tant que
Renvoyer T

Exercice 2

9 points

Une entreprise fabrique des pipettes destinées à être utilisées en laboratoire.

Le cahier des charges impose à une pipette d'avoir un diamètre interne d et une longueur L conformes aux exigences des utilisateurs. La pipette est alors conforme. Sinon, elle est considérée comme défectueuse.

Dans cet exercice, pour tout évènement A , on notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A .

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

L'entreprise met au point un nouveau contrôle automatisé qui vise à déterminer si une pipette est conforme ou défectueuse.

Toute pipette conforme devrait être acceptée au contrôle; toute pipette défectueuse devrait y être refusée. Toutefois :

- 96 % des pipettes défectueuses sont refusées au contrôle;
- 99 % des pipettes conformes sont acceptées au contrôle.

L'entreprise décide d'utiliser ce nouveau contrôle sur un lot comprenant un très grand nombre de pipettes, tout en sachant que 3 % des pipettes du lot sont défectueuses.

Une pipette est prélevée dans ce lot. On considère alors les évènements :

- D : « la pipette est défectueuse »;
- R : « la pipette est refusée au contrôle ».

On note respectivement \bar{R} et \bar{D} les évènements contraires des évènements R et D .