

Brevet de technicien supérieur session 2014 Géomètre topographe

A. P. M. E. P.

Exercice 1

9 points

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, on considère la courbe \mathcal{C} définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos(2t) \\ t(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

On note $M(t)$ le point de paramètre t .

1. Réduction de l'intervalle d'étude

- a. Montrer que l'on obtient toute la courbe \mathcal{C} pour t décrivant l'intervalle $I_0 = [-\pi; \pi]$.
- b. Que peut-on dire de $M(t)$ et $M(-t)$? Proposer un intervalle d'étude I_1 inclus dans I_0 .
- c. Que peut-on dire de $M(t)$ et $M(\pi - t)$? Proposer un intervalle d'étude I_2 inclus dans I_1 .

2. Tracé de la courbe

On étudie la courbe pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- a. Étudier le signe des fonctions x' et y' dérivées respectives des fonctions x et y pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
Compléter le tableau des variations conjointes de ces fonctions donné en annexe.
- b. On note A, B, C et D les points de paramètres respectifs $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$.
Compléter par des valeurs exactes le tableau donné en annexe.
- c. Placer les points A, B, C et D dans le repère donné en annexe.
En admettant que la tangente à la courbe \mathcal{C} au point D est dirigée par le vecteur de coordonnées $(4; 9)$, représenter les tangentes à la courbe \mathcal{C} aux points A, B et D.
- d. On admet que les dérivées secondes des fonctions x et y sont données par :

$$\begin{cases} x''(t) = -4 \cos(2t) \\ y''(t) = -9 \sin(3t) \end{cases}$$

Montrer que le rayon de courbure de \mathcal{C} au point B de paramètre $\frac{\pi}{6}$ est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le rayon de courbure est donné par la formule :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}.$$

- e. Tracer le cercle osculateur à la courbe au point B puis tracer la courbe complète dans le repère fourni en annexe.

Exercice 2

11 points

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

Cette partie propose un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

A. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la courbe Γ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = 3 \sin(t) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

La courbe Γ est :

- a. un cercle b. une ellipse c. une parabole d. une autre courbe

B. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les vecteurs $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{v}(1; 1; 3)$.

B. 1. Le produit scalaire de u par v est égal à :

- a. -1 b. \vec{v} c. 5 d. $-\vec{w}(2; -2; 0)$

B. 2. On considère la droite D_1 définie par le point $I(1; 0; 0)$ et le vecteur \vec{u} ainsi que la droite D_2 définie par le point $J(0; 1; 0)$ et le vecteur \vec{v} .

Ces deux droites sont :

- a. parallèles b. sécantes c. orthogonales d. non coplanaires et non orthogonales

B. 3. Le plan P passant par le point $A(2; 0; 1)$ et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , a pour équation cartésienne :

- a. $x - 2z = 0$ b. $x + y - 2 = 0$ c. $z = 1$ d. $x - y - 2 = 0$

Partie II

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On rappelle que tout point M d'une sphère de centre O et de rayon r est repéré par le triplet $(r; \theta; \varphi)$ où $r = OM$, θ est la longitude du point et φ est sa latitude (en radians).

Soit I l'inversion de pôle $N(0; 0; 1)$ et de rapport 8.

On considère le plan P défini par le point $A(0; 0; -3)$ de vecteur normal \vec{k} .

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P .
2. a. Justifier que l'image du plan P par l'inversion I , est la sphère Σ de centre O et de rayon r privée du point N .
b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère Σ .
3. Soit le point B de coordonnées $(2\sqrt{3}; 2; -3)$.
a. Justifier que B appartient au plan P .
b. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point B' , image du point B par l'inversion I .

- c. Montrer que les coordonnées sphériques du point B' sont $(1 ; \frac{\pi}{6} ; 0)$.
4. Compléter la figure donnée en annexe en plaçant les points N , A et B' sur la sphère Σ , le point A' image de A par l'inversion I et le point C' dont les coordonnées sphériques sont $(1 ; \frac{\pi}{2} ; 0)$
Enfin, placer le point B en laissant apparents les traits de construction.
5. a. Donner les caractéristiques du triangle sphérique $A'B'C'$ (on utilisera les notations usuelles).
b. Déterminer son aire.

Annexe 1 : à rendre avec la copie

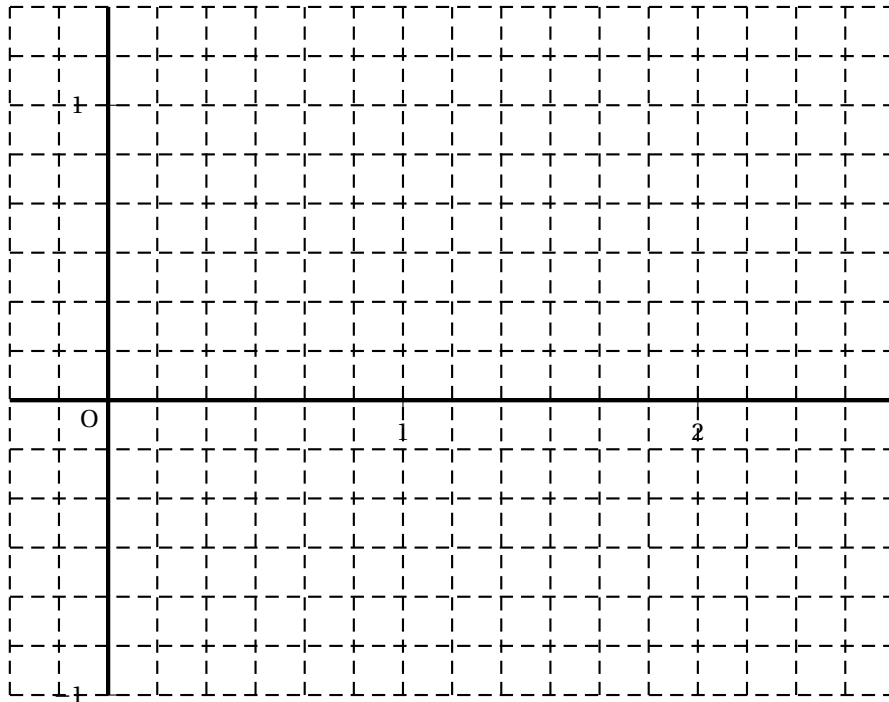
Exercice 1. Question 2. a.

t	
Signe de $x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
Signe de $y'(t)$	

Exercice 1. Question 2. b.

	A	B	C	D
Paramètre	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$				
$y'(t)$				
$x(t)$				
$y(t)$				

Exercice 1. Question 2. c. et 2. e.



Annexe 2 : à rendre avec la copie

Exercice 2. Question B 4.

