Brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier 12 mai 2016

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Étude d'une série statistique

Une grande entreprise d'optique fabrique un nouveau type de verre et décide de suivre l'évolution du nombre de verres fabriqués chaque jour pendant les deux premières années de sa commercialisation. Les observations ont lieu tous les quatre mois, le premier jour ouvré du mois.
Dans le tableau suivant est rapporté, pour chaque observation, le nombre de centaines de verres fabriqués le premier jour ouvré du mois considéré. Ainsi, au premier jour ouvré de janvier 2014, l'entreprise a fabriqué 1 000 verres ; au premier jour ouvré de mai 2014, elle a fabriqué 2 900 verres . . .

Date	Janvier 2014	Mai 2014	Septem. 2014	Janvier 2015	Mai 2015	Septem. 2015	Janvier 2016
Rang : x_i	0	4	8	12	16	20	24
Nombre de verres fabriqués (en centaines) : y_i	10	29	75	131	173	192	197

Afin de mieux modéliser cette série statistique, on effectue le changement de variable :

$$z = \ln\left(\frac{y}{200 - y}\right).$$

On obtient le tableau de valeurs suivant (les résultats ont été arrondis à 10^{-3}).

x_i	0	4	8	12	16	20	24
z_i	$-2{,}944$	$-1{,}774$	$-0{,}511$	0,641	1,857	3,178	4,185

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$.
   Expliquer pourquoi un ajustement affine de cette série est pertinent.
2. Donner une équation de la droite de régression de z en x selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont arrondis à 10^{-3}.
3. En déduire une estimation du nombre de verres fabriqués le premier jour ouvré du mois de mai 2016.

B. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{200}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,3x}}.$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants. Ces résultats sont admis et pourront être utilisés dans les questions suivantes.

Calcul formel	
1	Dérivée[200 / (1 + 19*exp(-0,3 x)),x] $\rightarrow 1\,140 \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}x}}{\left(19\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}x}+1\right)^2}$
2	Intégrale[200/(1 + 19*exp(- 0,3*x)),x,0,24] $\approx 2\,812{,}235\,459\,513$
3	Limite[200/(1 + 19*exp(- 0,3*x)), ∞] $\rightarrow 200$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Justifier que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

b. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,24]$, arrondie à 10^{-2}.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On considère que la fonction f modélise convenablement l'évolution du nombre de verres, exprimé en centaines, fabriqué chaque jour pendant les deux premières années de commercialisation. En utilisant les résultats précédents pour justifier vos réponses, répondre aux questions suivantes.

a. L'entreprise peut-elle envisager, dans ces conditions, d'atteindre un niveau de production de 250 centaines de verres par jour ?

b. Quel est, sur les 24 mois que dure l'étude, le nombre moyen de verres fabriqués par jour par l'entreprise ?

C. Étude d'une suite

Pour augmenter sa part de marché, la direction de cette entreprise décide de lancer une campagne de communication.
En janvier 2014, l'entreprise compte 120 clients.
On modélise l'évolution du nombre de clients de l'entreprise chaque mois à partir de janvier 2014 à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 120; \\ u_{n+1} & = & 0{,}98u_n+6, \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

où n représente le rang du mois en prenant $n = 0$ pour janvier 2014.
Ainsi, u_0 désigne le nombre de clients en janvier 2014.
Le nombre de clients au mois de rang n est estimé par l'arrondi à l'unité de u_n.

1. À l'aide de ce modèle, estimer le nombre de clients en mars 2014.

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte.*
Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.
La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On souhaite réaliser un algorithme qui affiche en sortie le rang du premier mois, s'il existe, où le nombre de clients dépasse 150.

Quel est, parmi les algorithmes proposés, celui qui réalise cet objectif ?

algorithme 1	algorithme 2
Début *Variables* : u, n *Initialisation* u prend la valeur 120 n prend la valeur 0 *Traitement* Tant que $u \leqslant 150$ u prend la valeur $0,98 \times u + 6$ Fin Tant que *Sortie* : afficher n **Fin**	**Début** *Variables* : u, n *Initialisation* u prend la valeur 120 n prend la valeur 0 *Traitement* Tant que $u \geqslant 150$ u prend la valeur $0,98 \times u + 6$ Fin Tant que *Sortie* : afficher n **Fin**

algorithme 3	algorithme 4
Début *Variables* : u, n *Initialisation* u prend la valeur 120 n prend la valeur 0 *Traitement* Tant que $u \leqslant 150$ n prend la valeur $n + 1$ u prend la valeur $0,98 \times u + 6$ Fin Tant que *Sortie* : afficher n **Fin**	**Début** *Variables* : u, n *Initialisation* u prend la valeur 120 n prend la valeur 0 *Traitement* Tant que $u \geqslant 150$ n prend la valeur $n + 1$ u prend la valeur $0,98 \times u + 6$ Fin Tant que *Sortie* : afficher n **Fin**

3. Pour tout entier n, on pose :

$$v_n = 300 - u_n.$$

On a donc $v_0 = 300 - u_0 = 180$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,98$.
Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 300 - 180 \times 0,98^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter, dans le contexte, le résultat obtenu.

Exercice 2 **10 points**

Un magasin d'optique dispose d'un répertoire informatique contenant un grand nombre de fichiers de clients ayant acheté des verres.
Pour chaque client, le fichier indique le type de verre acheté, le(s) traitement(s) effectué(s) ainsi que la date et l'heure de l'achat.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante
Dans cet exercice, les résultats approchés sont, sauf mention du contraire, à arrondir à 10^{-3}

A. Probabilités conditionnelles

On s'intéresse dans cette partie à deux types de traitements effectués sur les verres des clients : le traitement anti-statique et le traitement anti-reflet.

L'examen des fichiers du répertoire montre que 20 % des clients ont demandé le traitement anti-statique de leurs verres.
Il établit aussi que 70 % des clients ayant demandé le traitement anti-statique ont également demandé le traitement anti-reflet de leurs verres et que 10 % de ceux qui n'avaient pas demandé le traitement anti-statique ont demandé le traitement anti-reflet de leurs verres.
On prélève un fichier au hasard dans le répertoire.
On considère les évènements suivants :

S : « le fichier prélevé est celui d'un client ayant demandé le traitement anti-statique de ses verres » ;

R : « le fichier prélevé est celui d'un client ayant demandé le traitement anti-reflet de ses verres » ;

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

2. Calculer $P(S \cap R)$.

3. Montrer que la probabilité que le fichier prélevé est celui d'un client ayant demandé le traitement anti-reflet de ses verres est égale à $0,22$.

4. Calculer la probabilité conditionnelle $P_R(S)$.
(On rappelle que $P_R(S)$ est la probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement R est réalisé.)

B. Loi binomiale et loi normale

On s'intéresse dans cette partie à un troisième type de traitement des verres : le traitement anti-rayure. Dans le répertoire, 45 % des fichiers correspondent à des clients ayant demandé le traitement anti-rayure. On prélève au hasard et avec remise 100 fichiers dans le répertoire. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 fichiers, associe le nombre de fichiers de clients ayant demandé le traitement anti-rayure de leurs verres.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. On donne ci-dessous un extrait du tableau obtenu à l'aide d'un tableur fournissant des probabilités $P(X = k)$ et $P(X \leqslant k)$, où k désigne un entier naturel compris entre 0 et 100.

C2	=LOI.BINOMIAlE(A2 ;100 ;0,45 ;VRAI)			
	A	B	C	D
1	k	$P(X = k)$	$P(X \leqslant k)$	
2	45	0,079 988	0,541 316	
3	46	0,078 249	0,619 565	
4	47	0,073 557	0,693 122	
5	48	0,066 452	0,759 573	
6	49	0,057 698	0,817 272	
7	50	0,048 152	0,866 424	
8	51	0,038 625	0,904 048	
9	52	0,029 779	0,933 827	
10	53	0,022 066	0,955 893	
11	54	0,015 714	0,911 607	
12	55	0,010 153	0,982 359	
13	56	0,007 070	0,989 429	

a. Déterminer à l'aide de ce tableau la probabilité qu'il y ait, dans un prélèvement de 100 fichiers, exactement 50 fichiers de clients ayant demandé le traitement anti-rayure de leurs verres.

b. Déterminer à l'aide de ce tableau le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,975$.

3. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 45 et d'écart type $4,975$.

a. Justifier ces paramètres par le calcul.

b. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart type $4,975$.

Calculer, à l'aide de cette approximation, la probabilité qu'il y ait, dans un prélèvement de 100 fichiers, au moins 50 fichiers de clients ayant demandé le traitement anti-rayure de leurs verres, c'est-à-dire calculer $P(Z \geqslant 49,5)$.

C. Loi de Poisson

On s'intéresse aux clients achetant des verres polarisants le samedi après-midi.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque samedi après-midi, associe le nombre de clients achetant des verres polarisants. On admet que Y suit la loi de Poisson de paramètre 6.
Les questions 1 et 2 suivantes sont des questionnaires à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.
La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La probabilité d'avoir exactement quatre clients achetant des verres polarisants un samedi après-midi est :

0,104	0,134	0,285	0,889

2. La probabilité qu'un samedi après-midi il y ait au plus deux clients achetant des verres polarisants est :

0,012	0,045	0,062	0,938

D. Intervalle de confiance

Le directeur du magasin organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients ayant acheté des verres polarisants. Il veut estimer la proportion inconnue p de clients satisfaits par ce type de verre.
Pour cela, il interroge au hasard un échantillon de 150 clients parmi l'ensemble de sa clientèle ayant acheté des verres polarisants. Cette clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage avec remise.
Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des clients satisfaits par les verres polarisants. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{150}}$.
Pour l'échantillon prélevé, on constate que 135 clients sont satisfaits par les verres polarisants.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le niveau de confiance de 95 %. Indiquer les calculs effectués et arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.

3. Est-on certain que la proportion p appartienne à cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?