∽ Brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier ∾
15 mai 2023

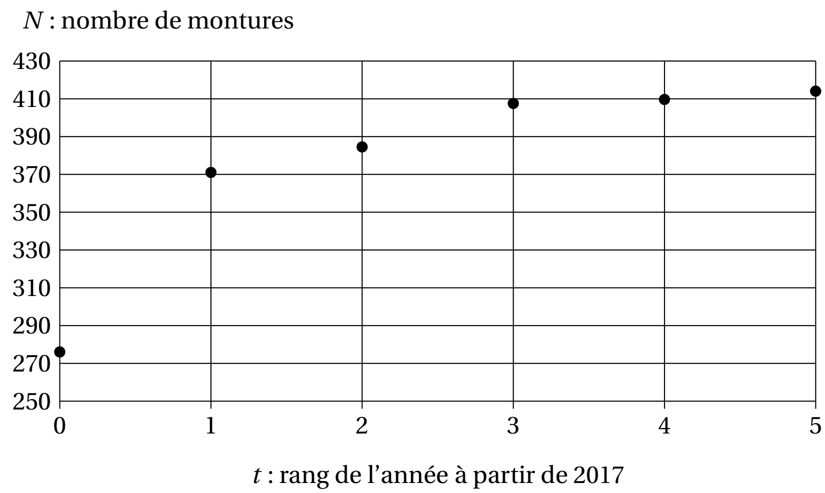
Exercice 1 **10 points**

On s'intéresse à une entreprise qui commercialise des montures de lunettes.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A - Etude d'une série statistique.

Le graphique ci-dessous représente l'évolution des ventes d'un modèle de monture de lunettes depuis l'année 2017.



1. Expliquer pourquoi un ajustement affine de N en t n'est pas pertinent.

2. On effectue le changement de variable $z = \ln(415 - N)$.
   On obtient alors le tableau suivant :

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
t	0	1	2	3	4	5
z	4,94	3,81	3,45	2,14	1,86	0,77

   a. A l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t\ ;\ z)$. Arrondir à 10^{-3}.

   b. Un ajustement affine de z en t est-il pertinent ? Justifier.

3. A l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression linéaire de z en t, selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$.
   Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-2}.

4. En déduire une expression de N à l'aide de t sous la forme :

$$N = 415 - C\mathrm{e}^{-0,8t},$$

où C est une constante que l'on déterminera, à l'unité près.

5. On suppose que l'évolution constatée se poursuit.
Quel sera le nombre de montures vendues en 2023 ?

Partie B - Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 5y' + 4y = 1660,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : 5y' + 4y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Equation différentielle	Solution sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$

2. Soit c in nombre réel. On considère la fonction constante g, définie par $g(t) = c$.
Déterminer c pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie la condition initiale $f(0) = 290$.

Partie C - Étude d'une fonction.

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 415 - 125\mathrm{e}^{-0,8t}.$$

On admet que cette fonction modélise l'évolution du nombre de montures vendues en fonction du temps :

t désigne le temps écoulé, en années, à partir de l'année 2017.

$f(t)$ désigne le nombre de montures vendues.

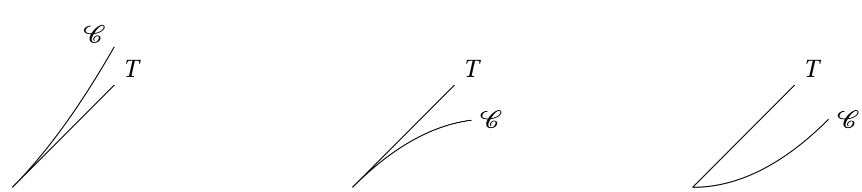
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants. Ces résultats sont admis et peuvent être utilisés dans les questions suivantes.

1	dérivée$(415 - 125\mathrm{e}^{-0,8t})$ $\rightarrow\ 100\mathbf{e}^{\frac{-4}{5}t}$
2	intégrale$(415 - 125\mathrm{e}^{-0,8t}, t)$ $\rightarrow\ \frac{625}{4}\mathbf{e}^{\frac{-4}{5}t} + 415t + c_1$
3	Limite$(415 - 125\mathrm{e}^{-0,8t},\infty)$ $\rightarrow\ 415$
4	PolynômeTaylor$(415 - 125\mathrm{e}^{-0,8t}, t, 0, 2)$ $\rightarrow\ 290 + 100t - 40t^2$

1. On sait que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.
   Donner une équation de cette asymptote.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. On note T la tangente à la courbe de $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   Indiquer, sans justifier, laquelle des trois situations ci-dessous représente correctement la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T au voisinage de zéro.



Situation 1 Situation 2 Situation 3

Partie D - Étude d'une suite.

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 3000$, et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 500.$$

La suite (u_n) représente l'évolution du nombre de clients de l'entreprise.
Ainsi u_n correspond au nombre de clients durant l'année 2017+n.

1. Vérifier que le nombre de clients lors de l'année 2018 est égal à 3200.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 5000$.
   Démonter que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, le terme v_n en fonction de n.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 5000 - 2000 \times 0{,}9^n.$$

5. Déterminer le nombre de clients lors de l'année 2023.

6. On considère l'algorithme suivant :

```
n←0
u←3000
Tant que u⩽4000
     n←n+1
     u←0,9*u+500
Fin Tant que
```

   Quelle est la valeur de la variable n après l'exécution de l'algorithme ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Remarque : l'énoncé original initialisait `n` *à 1, à la première ligne de l'algorithme.*

Exercice 2 **10 points**

Une usine fabrique des verres ophtalmiques à partir de verres semi-finis.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Partie A - Probabilités conditionnelles.

L'usine se procure des verres semi-finis auprès de trois fournisseurs différents.

- 30 % des verres semi-finis proviennent d'un premier fournisseur.
  Parmi eux, 3 % sont défectueux.
- 60 % des verres semi-finis proviennent d'un deuxième fournisseur.
  Parmi eux, 4 % sont défectueux.
- 10 % des verres semi-finis proviennent d'un troisième fournisseur.
  Parmi eux, 2 % sont défectueux.

On prélève un verre semi-fini au hasard. On considère les événements suivants.

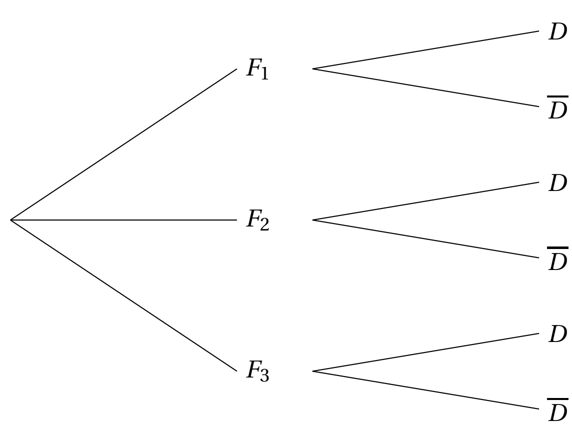
F_1 : « le verre semi-fini provient du premier fournisseur »,

F_2 : « le verre semi-fini provient du deuxième fournisseur »,

F_3 : « le verre semi-fini provient du troisième fournisseur »,

D : « le verre semi-fini est défectueux ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Calculer la probabilité $P(F_1 \cap D)$.

3. Montrer que la probabilité que le verre semi-fini soit défectueux est égale à 0,035.

4. On sait que le verre semi-fini est défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Partie B - Loi binomiale et loi normale.

On estime que 3,5 % des verres semi-finis du stock de l'usine sont défectueux.
On prélève un échantillon aléatoire de 200 verres semi-finis dans le stock de l'usine.
On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de verres semi-finis défectueux au sein de l'échantillon.

1. **a.** On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Donner ses paramètres.
   b. Calculer la probabilité $P(6 \leqslant X \leqslant 10)$.

2. On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X par une loi normale d'espérance 7 et d'écart type 2,599.

   a. Justifier la valeur de ces paramètres.
   b. On considère une variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance 7
   et d'écart type 2,6.
   Calculer $P(5{,}5 \leqslant Y \leqslant 10{,}5)$.
   Interpréter dans le contexte.

Partie C - Loi exponentielle.

On s'intéresse au standard téléphonique de l'usine.
On considère T la variable aléatoire qui, à chaque appel au standard, associe le temps d'attente, en minutes.
On admet que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$	$E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.
   Interpréter dans le contexte.

2. On considère un appel au standard, choisi au hasard.
   Déterminer la probabilité que le temps d'attente correspondant à cet appel soit compris entre 2 et 4 minutes.

Partie D - Estimation

L'usine souhaite estimer la proportion p de clients satisfaits d'un nouveau verre.
Sur un échantillon de 100 clients choisis au hasard, 80 d'entre eux ont déclaré être satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p.

2. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance 90 %.

   On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion avec un coefficient de confiance de 90 %
$\left[f - 1,65\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1,65\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$

3. Déterminer les entiers naturels n vérifiant l'inégalité : $1,65\sqrt{\dfrac{0,16}{n}} \leqslant 0,03$.

   Interpréter le résultat dans le contexte.