

∞ BTS Polynésie mai 2019 ∞
Services informatiques aux organisations

Mathématiques approfondies

A. P. M. E. P.

Exercice 1

10 points

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Une entreprise qui assemble des ordinateurs achète et stocke un certain type de composants informatiques. Le but de cet exercice est d'étudier certains aspects liés à ces composants.

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

L'entreprise achète les composants auprès de deux fournisseurs nommés A et B. Le fournisseur A lui procure 60 % de ses composants, le reste provient du fournisseur B.

Une étude statistique révèle que 0,5 % des composants provenant du fournisseur A sont défectueux, et que 1 % de ceux provenant du fournisseur B le sont également.

On prélève au hasard un composant dans le stock de l'entreprise.

On note A l'évènement « le composant provient du fournisseur A » et D l'évènement « le composant est défectueux ».

1. Traduire les données de l'énoncé dans un arbre de probabilités à l'aide des évènements A et D.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Sachant que le composant prélevé est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur B?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 0,7 % des composants du stock de l'entreprise sont défectueux.

Un technicien prélève au hasard 50 composants dans ce stock pour réaliser des assemblages. On considère que le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement de 50 composants à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, parmi les 50 composants prélevés, comptabilise le nombre de composants défectueux.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que le prélèvement ne comporte aucun composant défectueux.
3. Calculer la probabilité que le prélèvement comporte au plus un composant défectueux.

Partie C

Pour un certain type d'assemblage, le besoin journalier d'un technicien de l'entreprise, en nombre de composants, peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 10$.

1. Quelle est la probabilité qu'un jour donné le technicien ait besoin de plus de 110 composants?
2. Au début d'une journée, le technicien constate qu'il n'y a plus que 90 composants en stock.
Quelle est la probabilité que, ce jour-là, il ne puisse pas finir son travail?

Partie D

La durée de vie, en mois, d'un composant, peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Exprimer en fonction de λ la probabilité $P(T \geq t)$.
2. Sachant que $P(T > 24) = 0,698$, calculer λ en arrondissant la valeur au millième.
3. Dans cette question on prendra $\lambda = 0,015$.
 - a. Déterminer l'espérance mathématique de la variable T , arrondie à l'unité.
 - b. Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 3 ans.

Exercice 2

10 points

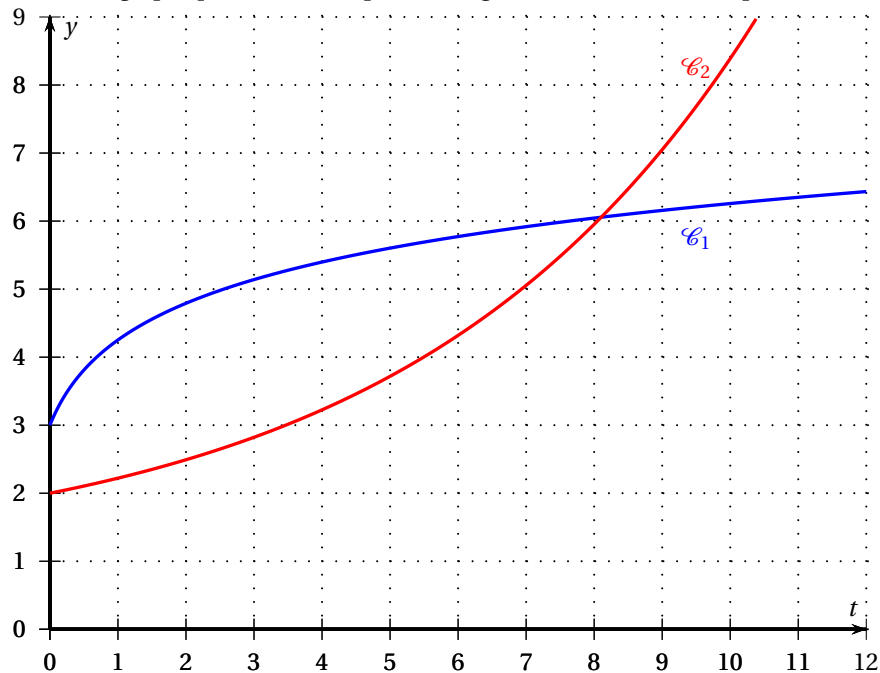
Une entreprise vend en ligne deux types de matériel informatique, nommés A et B, pendant plusieurs années. On considère qu'une personne est un client si elle a acheté au moins une fois l'un des types de matériel au cours de l'année écoulée.

En étudiant le fichier de l'entreprise, en fonction du temps à partir du 1^{er} janvier 2015, on modélise le nombre de clients pour le type A par une fonction f et celui des clients pour le type B par une autre fonction g . On suppose que ce modèle reste valide pendant 12 ans, jusqu'au 31 décembre 2026.

On exprime la variable t en année à partir du 1^{er} janvier 2015, $f(t)$ et $g(t)$ en milliers de clients. Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[0; 12]$ par les expressions :

$$f(t) = \ln(2,5t + 1) + 3 \quad \text{et} \quad g(t) = e^{0,2t} + 1.$$

Leurs représentations graphiques dans un repère orthogonal sont données ci-après.



Partie A**1. Tableau de valeurs et reconnaissance des courbes**

- a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant au centième.

t	0	2	5	6	7	8	12
$f(t)$							
$g(t)$							

- b. Associer chacune des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 aux deux fonctions f et g . Justifier la réponse.

2. Lectures graphiques Avec la précision permise par la lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

- a. Soit α la solution positive de l'équation $f(t) = g(t)$.
Donner une valeur approchée à l'unité de α . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
- b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) \geq g(t)$ dans l'intervalle $[0; 12]$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- c. À l'aide du graphique, estimer la valeur de t pour laquelle la différence $f(t) - g(t)$ est maximale.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- d. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur du nombre α défini en 2. a., en arrondissant cette valeur au centième.

Partie B

Le but de cette partie est de comparer les nombres moyens annuels de clients pour chacun des deux types de matériels, entre le 1^{er} janvier 2015 et le 31 décembre 2026.

1. Cas du matériel A

- a. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu pour primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$ la fonction F définie pour tout réel t de cet intervalle par :

$$F(t) = 2t + 0,4 \ln(t + 0,4) + t \ln(2,5t + 1).$$

En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^{12} f(t) dt$.

- b. Calculer la valeur moyenne, arrondie au dixième, de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Cas du matériel B

- a. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par $h(t) = 5e^{0,2t}$. Calculer $h'(t)$.
- b. En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0; 12]$.
- c. Démontrer que la valeur arrondie au dixième de l'intégrale $\int_0^{12} g(t) dt$ est égale à 62,1.
- d. En déduire une valeur moyenne approchée de la fonction g sur l'intervalle $[0; 12]$.

3. Comparaison

Entre le 1^{er} janvier 2015 et le 31 décembre 2026, pour lequel des deux types de matériel le nombre moyen annuel de clients sera-t-il le plus élevé?

Quel est ce nombre, arrondi à l'unité?