

∞ **BTS Métropole mai 2022** ∞
Services informatiques aux organisations

Mathématiques approfondies

Seuls les points supérieurs à 10 sont pris en compte.

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé

L'usage de calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé

Exercice 1 :

10 points

Une start-up fabrique entre 100 et 2000 ordinateurs par jour. On admet que si la start-up fabrique x **centaines** d'ordinateurs, le bénéfice en **centaines** d'euros est modélisé par :

$$f(x) = 80xe^{-0,2x}, \quad \text{avec } x \in [1; 20].$$

On note f' la dérivée de la fonction f , et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal, **donnée en annexe, à rendre avec la copie.**

Partie A - Étude graphique

À l'aide du graphique et en laissant les traits de construction apparents :

1. déterminer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[1; 20]$;
2. résoudre l'équation $f(x) = 100$, avec la précision permise par le graphique.

Partie B - Étude de la fonction f .

1.
 - a. Justifier que, pour tout x appartenant $[1; 20]$, $f'(x) = 80e^{-0,2x}(1 - 0,2x)$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 20]$.
 - c. En déduire le tableau de variation de la fonction f (les images seront, si besoin, arrondies au centième).
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 100$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; 5]$ puis en déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée au centième.
On admet que sur l'intervalle $[5; 20]$ l'équation $f(x) = 100$ admet également une unique solution égale à environ 10,76.

Partie C- Interprétation

1. Déterminer le bénéfice maximal à l'euro près réalisé par la start-up et le nombre d'ordinateurs fabriqués pour le réaliser.
2. Entre quelles valeurs doit être compris le nombre d'ordinateurs fabriqués pour que la start-up réalise un bénéfice supérieur ou égal à 10 000 euros?

Exercice 2 :**10 points**

Le directeur d'une entreprise fabriquant des cartes mères souhaite optimiser la production mensuelle. Il possède deux sites distincts notés A et B.

Le site A produit 65 % des cartes mères, le reste provient du site B.

Il a constaté que 0,8 % des cartes produites par A sont défectueuses alors que, sur le site B, la part des cartes défectueuses est de 0,5 %.

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

On prélève au hasard une carte mère à la sortie de la chaîne de production. On considère les événements suivants :

- A : « la carte a été produite par l'usine A. »
- B : « La carte a été produite par l'usine B. »
- D : « La carte est défectueuse. »

On rappelle que, quel que soit l'évènement E , on note \bar{E} son évènement contraire.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré en respectant les notations données ci-dessus.
2. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap D$ et donner une interprétation du résultat trouvé.
b. Montrer que $p(D) = 0,00695$ et donner une interprétation du résultat trouvé.
3. Une carte défectueuse a été prélevée au hasard dans le lot.
Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par l'usine A? On arrondira le résultat au millième.

Partie B

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

On considère dans cette partie que la probabilité qu'une carte soit défectueuse est égale à 0,007.

Les cartes produites par la start-up sont vendues par lots de 30. Avant expédition, on prélève au hasard un lot de 30 cartes pour vérifier leur bon fonctionnement. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, pour un lot de 30 cartes prélevées, dénombre celles qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'aucune carte prélevée ne soit défectueuse.
b. En déduire la probabilité qu'au moins une carte prélevée présente un défaut dans le lot choisi au hasard.

Partie C

Dans cette partie, l'équipe de production du site A souhaite étudier le débit du bus FSB des cartes mères qu'elle produit.

On note Y la variable aléatoire qui modélise ce débit en Mo/s (méga octet par seconde).

On admet que Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 1350$ et d'écart-type $\sigma = 33$.

On prélève au hasard une carte mère à la sortie de la chaîne de production.

1. Déterminer la probabilité que le débit de la carte choisie soit compris entre 1317 et 1383 Mo/s. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
2. Déterminer la plus grande valeur de l'entier k tel que $P(Y > k) \geq 0,95$.

ANNEXE

Exercice 1

