

∞ **BTS Métropole 17 mai 2023** ∞
Services informatiques aux organisations

Mathématiques approfondies

Seuls les points supérieurs à 10 sont pris en compte

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé

Exercice 1 :

10 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

En 2022, une usine a assemblé 300 000 ordinateurs. L'entreprise souhaite optimiser les lignes de production dans les années futures et prévoit d'augmenter le nombre d'ordinateurs assemblés de 2 % par an.

On modélise la production annuelle de l'usine par une suite (P_n) telle que pour tout entier naturel n , P_n représente le nombre d'ordinateurs assemblés exprimé en milliers, au cours de l'année 2022 + n . Ainsi $P_0 = 300$.

1.
 - a. Calculer P_1 puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
 - c. Déterminer la nature de la suite (P_n) .
2.
 - a. Pour tout entier naturel n , exprimer P_n en fonction de n .
 - b. En déduire, à l'unité près, le nombre d'ordinateurs assemblés en 2030 selon ce modèle.
3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $P_n > 400$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse plus précisément à l'une des lignes d'assemblage de l'usine.

Cette ligne permet d'assembler entre 20 000 et 40 000 ordinateurs par an.

On admet que si cette ligne d'assemblage permet de produire x milliers d'ordinateurs par an, le bénéfice associé, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[20; 40]$ par :

$$f(x) = (45 - x)e^{0,1x} - 10.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats au centième :

x	20	25	30	35	40
$f(x)$					

2. a. Montrer que pour tout x appartenant à $[20; 40]$, $f'(x) = (-0,1x + 3,5)e^{0,1x}$.
 b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[20; 40]$.
 c. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.
 Les valeurs des images seront arrondies au centième.
3. Déterminer le nombre d'ordinateurs que la ligne d'assemblage doit fabriquer par an afin d'obtenir un bénéfice associé maximal.
 Donner, à la dizaine d'euros près, la valeur de ce bénéfice maximal.
4. On considère la fonction F définie sur $[20; 40]$ par

$$F(x) = (550 - 10x)e^{0,1x} - 10x.$$

On admet que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[20; 40]$.

- a. Montrer que la valeur exacte de $\int_{30}^{40} f(x) dx$ est $150e^4 - 250e^3 - 100$.
 b. En déduire une valeur approchée à la dizaine d'euros du bénéfice moyen réalisé lorsque la ligne d'assemblage produit entre 30 000 et 40 000 ordinateurs.

Exercice 2 :

10 points

Partie A

Le tableau suivant, où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2015, donne le nombre y_i d'appareils connectés, exprimé en milliards, dans le monde entre 2015 et 2021.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
x_i : rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6
y_i : nombre d'appareils (en milliards)	15,4	17,7	20,4	23,1	26,7	30,7	35,8

1. a. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i ; y_i)$. Arrondir le résultat au centième.
 b. Expliquer pourquoi le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.
2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x , sous la forme $y = ax + b$. Les coefficients a et b seront arrondis au dixième.
3. À l'aide de l'équation de la droite de régression trouvée précédemment, estimer le nombre d'appareils qui seront connectés en 2023.

Partie B

Un fabricant commercialise des montres connectées.

Les batteries utilisées pour fabriquer ces montres proviennent de deux fournisseurs différents, notés A et B.

75 % des batteries du stock du fabricant proviennent du fournisseur A, les autres proviennent du fournisseur B.

Le fabricant remarque des défauts de charge parmi les batteries de son stock.

Après analyse, il constate que 1,2 % des batteries provenant du fournisseur A et 2 % de celles provenant du fournisseur B sont défectueuses.

On prélève au hasard une batterie dans le stock du fabricant.

On considère les événements suivants :

A : « la batterie prélevée provient du fournisseur A »;

B : « la batterie prélevée provient du fournisseur B »;

D : « la batterie prélevée est défectueuse ».

On note \bar{D} l'évènement contraire de l'évènement D .

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
2.
 - a. Calculer la probabilité de l'évènement $B \cap D$.
 - b. Interpréter le résultat obtenu par une phrase.
3. Montrer que la probabilité que la batterie prélevée soit défectueuse est égale à 0,014.
4. Sachant que la batterie prélevée est défectueuse, déterminer la probabilité que celle-ci provienne du fournisseur B.

On arrondira le résultat au millième.

5. Le fabricant prélève au hasard 50 batteries de son stock.

Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 50 batteries, associe le nombre de batteries défectueuses.

- a. Sans justifier, préciser la loi suivie par la variable aléatoire X ainsi que les paramètres de cette loi.
- b. Calculer la probabilité qu'au moins une batterie soit défectueuse. Arrondir le résultat au millième.