

œ Brevet de technicien supérieur Métropole œ
mai 2014 - Services informatiques aux organisations
Mathématiques approfondies

A. P. M. E. P.

Épreuve facultative

Exercice 1

10 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième.

Une société de vente par correspondance de matériel informatique a étudié le fichier clientèle pour connaître l'utilisation du modèle A100 de disque dur externe de son catalogue.

L'enquête a porté sur 1 280 personnes ayant acheté ce modèle au cours des trois, derniers mois. Les résultats concernant le sexe de l'utilisateur et l'usage personnel ou professionnel du disque dur A100 sont consignés dans le tableau ci dessous.

	Usage personnel	Usage professionnel
Homme	360	480
Femme	160	280

Partie A

Un opérateur de la société est chargé d'appeler des clients au téléphone dans le but de leur proposer un nouveau produit, le disque B200.

L'opérateur choisit une personne dans le fichier de ces 1 280 personnes. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

1.
 - a. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?
 - b. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme qui fasse un usage personnel du disque dur externe A100 ?
 - c. La personne choisie est une femme. Quelle est la probabilité que cette femme fasse un usage professionnel du disque dur externe A100 ?
2. On admet que, pour chaque client choisi au hasard dans le fichier des 1 280 clients ayant acheté le disque A100, l'opérateur a une probabilité égale à 0,03 d'obtenir une promesse d'achat du disque B200.

L'opérateur appelle 25 personnes choisies au hasard dans le fichier ; Le nombre de clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces choix à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de promesses d'achat parmi les 25 personnes appelées.

- a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
- b. Calculer la probabilité que l'opérateur obtient exactement 2 promesses d'achat d'un disque B200 sur les 25 personnes appelées.
- c. Quelle est la probabilité que l'opérateur obtienne au moins une promesse d'achat sur les 25 personnes appelées ?

Partie B

Une enquête de satisfaction réalisée par le constructeur du disque A100, indique que 64 % des acquéreurs de ce disque en sont satisfaits.

On interroge au hasard 160 acquéreurs du disque A100.

On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de clients satisfaits par leur achat.

On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 160$ et $p = 0,64$.

On décide d'approcher la loi de la variable Y par une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de paramètres m et σ .

1. Justifier que cette loi normale a pour moyenne 102,4 et pour écart-type 6,1 arrondi au dixième.
2. On note Z la variable aléatoire qui suit cette loi normale.
Calculer $p(Z \geq 120,5)$ c'est-à-dire la probabilité que le nombre de clients satisfaits par le disque A100 soit strictement supérieur à 120.

Partie C

La variable aléatoire T donnant la durée de fonctionnement d'un disque A100, exprimée en mois avant la première défaillance, suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Le service après-vente a pu établir que 30 % des disques A100 ont eu une défaillance avant la fin du 18^e mois.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ et montrer que la valeur arrondie au centième de λ est égale à 0,02.

Pour les questions suivantes, on prendra pour λ cette valeur 0,02.
2. Calculer la probabilité qu'un disque n'ait pas de défaillance au cours des 3 premières années.
3. Calculer la Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement (MTBF) de ces disques durs.

Exercice 2**10 points**

Un institut statistique conduit une étude à partir de données obtenues sur la période 2000 – 2013. Cette étude porte sur l'évolution du pourcentage d'internautes au sein de la population française.

Son objectif est de réaliser des estimations de ce pourcentage pour la période 2014–2050.

L'institut a ainsi modélisé cette situation par une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 50]$ par

$$f(t) = \frac{100}{1 + 6e^{-0,25t}}$$

où t est le temps écoulé en années depuis le 1^{er} janvier 2000 et $f(t)$ le pourcentage d'internautes par rapport à l'ensemble de la population française à l'instant $(2000 + t)$.

Par exemple, $f(12) \approx 77,0$ signifie que la population française compte 77 % d'internautes au 1^{er} janvier 2012.

1. Calculer le pourcentage d'internautes au sein de la population française le 1^{er} janvier 2000.
On arrondira le résultat au dixième.

2. a. Établir que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; 50]$ on a :

$$f'(t) = \frac{150e^{-0,25t}}{(1 + 6e^{-0,25t})^2}.$$

- b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 50]$.
3. Calculer $f(19)$. Peut-on affirmer qu'en 2019, le pourcentage d'internautes au sein de la population française sera d'au moins 95 % ?
4. a. Résoudre par le calcul sur l'intervalle $[0; 50]$ l'équation : $f(t) = 99,9$.
On arrondira le résultat à l'unité.
- b. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.
5. Soit la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 50]$ par :

$$F(t) = 100t + 400 \ln(1 + 6e^{-0,25t}).$$

On admet que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 50]$.

- a. Calculer la valeur moyenne exacte de la fonction f sur l'intervalle $[0; 13]$.
- b. En donner une valeur arrondie au dixième.
- c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.