

œ Brevet de technicien supérieur Métropole œ
12 mai 2016 - Services informatiques aux organisations
Mathématiques approfondies

A. P. M. E. P.

Épreuve facultative

Exercice 1

10 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

L'administrateur d'un site web crée un forum pour que les visiteurs puissent, s'ils le désirent, poster des messages.

Partie 1

L'administrateur souhaite établir un lien entre le nombre de visiteurs du site et le nombre de visiteurs qui postent un message.

On pose n le nombre de mois écoulés depuis le lancement du forum, x_n le nombre de visiteurs du site en milliers et y_n le nombre de visiteurs en milliers ayant posté un message sur le forum depuis le lancement.

L'administrateur obtient les données statistiques suivantes :

Mois écoulés depuis le lancement du forum	n	1	2	3	4	5	6
x : Visiteurs (en milliers)	x_n	0,8	1,0	1,1	1,5	2,5	3,1
y : Visiteurs ayant posté un message (en milliers)	y_n	0,4	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1

1. On introduit le changement de variable $z_n = e^{y_n}$ pour n compris entre 1 et 6. Recopier le tableau suivant et compléter la dernière ligne.

Les valeurs seront arrondies au dixième.

Mois	n	1	2	3	4	5	6
x	x_n	0,8	1,0	1,1	1,5	2,5	3,1
$z = e^y$	$z_n = e^{y_n}$	1,5					

2. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés.

Les coefficients seront arrondis au dixième.

3. En déduire une estimation de y en fonction de x .
4. On suppose que la relation trouvée précédemment reste vraie les années suivantes. Lorsque le nombre de visiteurs sera égal à 10 000, estimer le nombre de visiteurs qui auront posté un message (arrondir à l'unité).

Partie 2

Dans cette partie, on étudie des lois de probabilité en lien avec la gestion du site web.

Sauf indication contraire, tous les résultats seront arrondis au millième.

1. Le serveur du site web limite la durée d'attente des visiteurs en les connectant le plus vite possible aux pages demandées. On note T la variable aléatoire qui, à une telle connexion prise au hasard, associe la durée d'attente en seconde. L'administrateur constate que la variable T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 5]$.

- a. Calculer la probabilité que la durée d'attente soit comprise entre 2 et 4 secondes.
 - b. Calculer l'espérance de T et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque message posté au hasard, associe le temps d'attente en heure avant une réponse. L'administrateur remarque que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $a = 0,125$, exprimé en h^{-1} .
- a. Donner le temps d'attente moyen avant qu'une réponse soit postée.
 - b. On admet que la variable aléatoire N qui, à chaque message posté, associe le nombre de réponses à ce message au bout d'un jour, suit la loi de Poisson de paramètre λ . En 24 heures et à raison d'une réponse en moyenne toutes les 8 heures, on a donc $\lambda = 3$.
Calculer la probabilité $p(N = 5)$ et traduire ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - c. Pour gérer l'espace de stockage dédié au forum, l'administrateur veut limiter le nombre de réponses possibles à un message.
Déterminer l'entier naturel n à partir duquel on a

$$p(N \leq n) > 0,99999.$$

L'administrateur choisira alors de limiter les discussions à n messages.

Exercice 2

10 points

Partie 1- Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[2; 22]$ par :

$$f(x) = (x - 2)e^{-0,5x+3}.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, I, J) .

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[2; 22]$.
 - a. En utilisant les résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel (annexe), donner une expression factorisée de $f'(x)$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2; 22]$.
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2; 22]$. On arrondira au centième les valeurs de $f(x)$ qui y apparaissent.
2. a. D'après un logiciel de calcul formel, la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
Interpréter graphiquement ce résultat.
- b. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au centième.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$f(x)$											

- c. Tracer la courbe \mathcal{C}_f dans le repère (O, I, J) .
On pourra choisir pour unités graphiques : 0,5 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour une unité en ordonnées.
3. On pourra répondre aux questions suivantes à l'aide d'un logiciel de calcul formel (voir annexe).

- a. Donner l'expression $F(x)$ d'une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2; 22]$.
- b. Donner la valeur approchée au dix-millième de l'intégrale $I = \int_3^5 f(x) dx$.
- c. Hachurer la partie du graphique dont l'aire exprimée en unité d'aire est égale à I .

Partie 2 - Application économique

Une entreprise commercialise des ordinateurs portables. Le prix de revient d'un ordinateur est de 200 euros. On suppose que le nombre d'acheteurs d'un ordinateur est modélisé par

$$N = e^{-0,5x+3}$$

où x est le prix de vente d'un ordinateur, exprimé en centaines d'euro.

1. Montrer que la fonction f de la partie 1 donne le bénéfice réalisé par l'entreprise, en centaines d'euro.
2. À quel prix l'entreprise doit-elle vendre un ordinateur pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, à l'euro près ?
3. Durant la première année de commercialisation des ordinateurs portables, le prix de vente varie régulièrement entre 300 euros et 500 euros. Calculer, à l'euro près, le bénéfice moyen.

ANNEXE

Exercice 2 - partie 1 :

Résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

1	deriver((x-2)*exp(-0.5x+3))	$(-0.5x+2.0)*\exp(-0.5x+3.0)$
2	deriver(-2x*exp(-0.5x+3))	$(x-2.0)*\exp(-0.5x+3.0)$
3	integrer(-0.5*x+2.0)*exp(-0.5*x+3.0),x,2,22)	0.00670925256
4	integrer((x-2)*exp(-0.5x+3),x,3,5)	10.40292172
5	limite((x-2)*exp(-0.5x+3),x,+infinity)	0