∽ Brevet de technicien supérieur Métropole ∾
12 mai 2015 - Services informatiques aux organisations
Mathématiques approfondies

Épreuve facultative

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties **A, B** et **C** peuvent être traitées de manière indépendante.

Une entreprise d'envergure internationale produit des composants pour ordinateurs portables, notamment des batteries et des écrans.

Partie A

Au cours de la production, les batteries peuvent présenter, de façon indépendante, deux défauts principaux, notés a et b. On considère qu'une batterie produite est défectueuse lorsqu'elle comporte au moins l'un des défauts a ou b.
On prélève une batterie au hasard dans la production d'une journée. La probabilité que le défaut a apparaisse est égale à $0,02$, celle que le défaut b apparaisse est égale à $0,01$.
On note A l'évènement « le défaut a apparaît », et B l'évènement « le défaut b apparaît ».

1. **a.** Justifier l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

   b. Calculer la probabilité qu'une batterie produite soit défectueuse. On arrondira le résultat à la quatrième décimale.

2. On prélève au hasard dans la production un lot de 100 batteries. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage aléatoire avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 batteries, associe le nombre de batteries défectueuses détectées.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner les paramètres de cette loi.

   b. Calculer $P(X \geqslant 3)$, en arrondissant à la quatrième décimale. Interpréter le résultat.

Partie B

On s'intéresse maintenant à la durée de charge de ces batteries.
On prélève au hasard une batterie dans la production, et l'on note Y la variable aléatoire qui modélise le temps de charge, en minute, de cette batterie.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $m = 80$ et $\sigma = 10$.

1. Calculer la probabilité $P(60 \leqslant Y \leqslant 100)$. On arrondira le résultat à la quatrième décimale.

2. Déterminer le réel h, arrondi à la deuxième décimale, tel que $P(Y \geqslant h) = 0,95$.

   Formuler une interprétation de ce résultat.

Partie C

La durée de bon fonctionnement d'un écran, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Le temps moyen de bon fonctionnement des écrans est de 1 900 jours.

1. En arrondissant à la quatrième décimale,justifier que λ s'exprime en jour^{-1} par : $\lambda = 0{,}0005$.
2. Quelle est la probabilité que l'écran fonctionne encore correctement après 4 000 jours d 'utilisation ? On arrondira le résultat à la quatrième décimale.
3. Déterminer le réel t tel que $P(T \leqslant t) = 0,7$. On donnera la valeur de t arrondie à l'entier.
   Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 6{,}5]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 6{,}5]$, on a :
   $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)(x-4)}{x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 6{,}5]$.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
2. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au dixième.

x	1	2	3	4	5	6	6,5
$f(x)$							

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On pourra choisir pour unités graphiques : 1 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour une unité en ordonnées.
3. Soit F la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 6{,}5]$ par :

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - 16x\ln(x).$$

   Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6{,}5]$.

B. Applications à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces qu'elle conditionne par paquets de cent. Sa fabrication journalière varie entre 100 pièces et 650 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour q centaines de pièces fabriquées $(1 \leqslant q \leqslant 6,5)$, est modélisé par $f(q)$, où f est la fonction définie dans la partie **A**.

1. **a.** Justifier que l'équation $f(q) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[4 ; 6{,}5]$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution.

b. En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.

2. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer cc bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.

3. Avec la modélisation choisie, le bénéfice moyen B_m réalisé par l'entreprise, s'exprime, en milliers d'euro, par :

$$B_m = \frac{1}{5,5} \times \int_1^{6,5} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calculer ce bénéfice moyen, arrondi à la centaine d'euro.